

# 一类带奇异型Trudinger-Moser项的非线性椭圆方程非负解存在性

王庚, 王非之

烟台大学数学与信息科学学院, 烟台市 264003

摘要: 研究奇异型Trudinger-Moser嵌入

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|v|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx < \infty,$$

其中  $u = u(x), \|\nabla v\|_{L^2} \leq 1, v = v(x) \in W_0^{1,2}(\Omega), \Omega \subset R^2$  为包含原点的区域,  $\alpha > 0, \beta \in [0, 2)$ ,  $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$ . 并证明如下结论

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} \rightarrow \int_{\Omega} \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} = C(b, \beta),$$

其中  $f(u) = g(u)e^{bu^2}, g(0) = 0, g(t) = -g(-t) > 0, t > 0$ , 对任意的  $b > 0, \beta \in [0, 2)$  有  $\frac{b}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$  成立. 通过使用山路引理证明带奇异型Trudinger-Moser项的非线性方程  $-\Delta u = \frac{f(u)}{|x|^{\beta}}$  的非负解存在性.

关键词: 非线性椭圆方程; 非负解存在性; 奇异型Trudinger-Moser嵌入; 山路引理

中图分类号: O175.2

## Existence of non negative solutions for a class of Nonlinear Elliptic Equations with singular Trudinger-Moser terms

WANG Geng, WANG Fei-Zhi

Department of mathematics and information science, Yantai University, Yantai City 264003

**Abstract:** Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $R^2$  containing the origin, we study the singular Trudinger-Moser embedding

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|v|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx < \infty,$$

**作者简介:** 王庚 (1991-), 男, 硕士研究生在读, 主要研究方向: 偏微分方程及应用. 通信作者: 王非之 (1973-), 男, 教授, 主要研究方向: 非线性椭圆方程和方程组的存在性与多解性. 通信邮箱: wang\_feizhi@126.com.

where  $u = u(x)$ ,  $\|\nabla v\|_{L^2} \leq 1$ ,  $v = v(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in [0, 2)$ ,  $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$ . And the conclusions are as follows:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} \rightarrow \int_{\Omega} \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} = C(b, \beta),$$

where  $f(u) = g(u)e^{bu^2}$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(t) = -g(-t) > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\forall b > 0$ ,  $\forall \beta \in [0, 2)$ ,  $\frac{b}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$ . The existence of non negative solutions of nonlinear equation with singular Trudinger-Moser terms  $-\Delta u = \frac{f(u)}{|x|^{\beta}}$  is proved by using the mountain pass lemma.

**Key words:** Nonlinear Elliptic Equations; Existence of non negative solutions; Singular Trudinger-Moser embedding; Mountain pass lemma

## 0 引言

考虑如下带奇异型Trudinger-Moser项的Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} & x \in \Omega \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  为包含原点的区域, 范数  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $f(u)$  为临界增长函数(参见1.2. 定义3), 且有  $f(u) = g(u)e^{bu^2}$ , 对任意的  $b > 0$ ,  $\beta \in [0, 2)$  有  $\frac{b}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$  成立.

文献[1, 2]对Sobolev嵌入研究, 得到了Trudinger-Moser嵌入. 文献[3]将Trudinger-Moser嵌入规范化并得到奇异型Trudinger-Moser嵌入

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = C < \infty,$$

其中  $u = u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in [0, 2)$ ,  $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$ . 如果  $\alpha > 4\pi$  那么

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = \infty.$$

对于奇异型Trudinger-Moser不等式文献[4, 5]给出如下结论

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|v|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = C < \infty,$$

其中  $v = v(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\|\nabla v\|_{L^2} \leq 1$ . 对于  $f(u) = g(u)e^{bu^2}$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(t) = -g(-t) > 0$ ,  $t > 0$ , 由文献[5]的方法我们将证明如下结论:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} \rightarrow \int_{\Omega} u \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} = C(b, \beta) < \infty,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} \rightarrow \int_{\Omega} \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} = C_1(b, \beta) < \infty. (\text{参见引理3})$$

而问题(1)的解正是对应泛函  $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow R$  的临界点

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \int_0^u \frac{f(s)}{|x|^{\beta}} ds dx,$$

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} \frac{f(u)v}{|x|^{\beta}} dx \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

因此,  $I(u) = c, I'(u) = 0$  泛函  $I$  满足 Palais-Smale 条件. 类似于文献[6], 本文将利用 Trudinger-Moser 不等式上确界可达到这一结果及文献[7]中山路引理, 证明 2 维中带奇异型 Trudinger-Moser 项的 Dirichlet 问题非负解存在条件.

## 1 预备知识

### 1.1 奇异型 Trudinger-Moser 嵌入

考虑如下泛函

$$F_{\Omega}(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x)).$$

**引理 1.** (集中紧性选择定理) 若对于每一个序列  $\{u_i\} \subset \mathfrak{A}(\Omega)$  有  $u_i \rightharpoonup u$  和  $\|\nabla u_i\| \rightharpoonup \theta \delta_x, 0 \leq \theta \leq 1$ . 那么存在一个子列使得  $\{u_i\}$  集中到一点  $x \in \Omega$ , 且  $u = 0$  或紧性情形  $\lim_{i \rightarrow \infty} F_{\Omega}(u_i) = F_{\Omega}(u)$  成立. 如果  $\{u_i\}$  集中到一点  $x$ , 那么对于某个  $\gamma \in R, f(x, u_i) dx \rightharpoonup f(x, 0) dx + \gamma \delta_x$  成立.

定义集合  $\mathfrak{A}(\Omega)$  及  $W_{0,rad}^{1,2}(B_1)$

$$\mathfrak{A}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\},$$

$$W_{0,rad}^{1,2}(B_1) = \{u \in W_0^{1,2}(B_1), u(x) = u(|x|)\}.$$

**定义 1.**

$$F_{\Omega}^{\sup} = \sup_{u \in \mathfrak{A}} F_{\Omega}(u).$$

**定义 2.** (集中函数) 若  $x \in \bar{\Omega}$  且  $F_{\Omega}^{\sup}$  的上确界仅在集中序列处取得, 记  $F_{\Omega}^{\delta}(x)$

$$F_{\Omega}^{\delta}(x) = \sup \{ \limsup_{i \rightarrow \infty} F_{\Omega}(u_i) \mid \{u_i\} \subset \mathfrak{A} \text{ 集中到 } x \}.$$

**引理 2.** 令  $\Omega \subset R^2$  为一个具有光滑边界的有界单连通区域且  $0 \in \Omega$ . 若  $\alpha > 0, \beta \in [0, 2)$  使得  $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$  成立, 则存在  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  和  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$  使得

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2} \leq 1}} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|u|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx = \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha|v|^2} - 1}{|x|^{\beta}} dx < \infty$$

成立.

文献[4, 5]证明了上面的奇异型Trudinger-Moser不等式上确界可达到. 我们将利用其中的方法证明下面的一个引理.

**引理 3.** 令  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是一个具有光滑边界的有界单连通区域且  $0 \in \Omega$ .  $f(u) = g(u)e^{bu^2}$ ,  $g(0) = 0, g(t) = -g(-t) > 0, t > 0$ , 对任意的  $b > 0, \beta \in [0, 2)$  使得  $\frac{b}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leq 1$  成立. 若序列  $\{u_n\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  中存在一个子列也表示为  $\{u_n\}$ , 对于  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  使得  $u_n \rightharpoonup u$ , 那么

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} dx = \mathcal{C}(b, \beta) < \infty.$$

证明. 证明过程分以下三部分:

对于单连通区域存在一个共形映射  $h$ , 并满足如下性质

$$h: B_1 \rightarrow \Omega \quad \text{并且} \quad h(0) = 0.$$

1). 我们将两个开集  $B_1, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  上的共形映射  $h$  作为微分同胚处理, 由Cauchy-Riemann方程, 其Jacobian计算如下

$$\det \frac{\partial h(x)}{\partial x} = |h'(x)|^2.$$

通过变量变换  $x = h(y), v(y) = h(y) \circ u(x)$  得到

$$|\nabla v(y)|^2 = |\nabla u(h(y))|^2 |h'(y)|^2,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{B_1} |\nabla v|^2 dy.$$

如果  $v \in \mathfrak{A}(B_1)$  那么  $u \in \mathfrak{A}(\Omega)$ . 由变量变换  $x = h(y)$ , 有

$$G_{\Omega}(u) = \int_{\Omega} \frac{f(u)}{|x|^{\beta}} dx = \int_{h(B_1)} \frac{g(u)e^{bu^2}}{|x|^{\beta}} dx = \int_{B_1} \frac{g(v(y))e^{bv(y)^2}}{|h(y)|^{\beta}} |h'(y)|^2 dy.$$

若  $v$  是径向的, 则

$$G_{\Omega}(u) = \int_0^1 g(v(r))e^{bv(r)^2} \int_{\partial B_r} \frac{|h'(y)|^2}{|h(y)|^{\beta}} d\theta dr.$$

由文献[5](引理10)

$$2\pi |h'(0)|^{\gamma-\beta} \leq r^{\beta} \int_0^{2\pi} \frac{|h'(re^{it})|^{\gamma}}{|h(re^{it})|^{\beta}} dt \quad r \in (0, 1)$$

及  $v$  是径向的, 得到

$$G_{\Omega}(u) \geq |h'(0)|^{2-\beta} \int_0^1 \frac{g(v(r))e^{bv(r)^2}}{r^{\beta}} 2\pi r dr = |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}(v).$$

令  $v \in W_0^{1,2}(B_1) \cap \mathfrak{A}(B_1)$ ,  $v^*$  是它的递减对称径向重排. 由对称重排的性质, 有  $v^* \in W_{0,rad}^{1,2}(B_1) \cap \mathfrak{A}(B_1)$  和

$$G_{B_1}(v) \leq G_{B_1}(v^*).$$

令  $u = v^* \circ h^{-1} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . 那么由上面的证明过程可以得到  $u \in \mathfrak{A}(B_1)$  及

$$G_{\Omega}^{\sup} \geq G_{\Omega}(u) \geq |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}(v^*) \geq |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}(v).$$

2). 使用变量变换  $x = h(y)$ , 并选择任意的  $\delta > 0$  使得

$$\begin{aligned}\lim_{i \rightarrow \infty} G_{\Omega}(u_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_1 \setminus B_{\delta}} \frac{g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2}}{|h(y)|^{\beta}} |h'(y)|^2 dy \\ &\quad + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_{\delta}} \frac{g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2}}{|h(y)|^{\beta}} |h'(y)|^2 dy \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} B_1^i(\delta) + \lim_{i \rightarrow \infty} B_2^i(\delta).\end{aligned}$$

对于任意的  $s \in B_1 \setminus \{0\}$ ,  $h(s) \neq 0$ , 有  $\frac{|h'(y)|^2}{|h(y)|^{\beta}} \in L^{\infty}(B_1 \setminus B_{\delta})$ . 因为  $\Omega$  有界且具有光滑边界, 因此  $|h'|^2$  有界, 对于所有的  $\delta > 0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_1 \setminus B_{\delta}} g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2} dy = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{i \rightarrow \infty} B_1^i(\delta) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_1 \setminus B_{\delta}} \frac{g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2}}{|h(y)|^{\beta}} |h'(y)|^2 dy = 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} B_2^i(\delta) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_1} \frac{g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2}}{|h(y)|^{\beta}} |h'(y)|^2 dy - \lim_{i \rightarrow \infty} B_1^i(\delta) = \lim_{i \rightarrow \infty} G_{\Omega}(u_i).\end{aligned}$$

由于  $h(0) = 0$ ,  $h$  为共形映射, 那么存在一个解析映射  $k \in H(B_1)$  使得

$$h(x) = xk(x), \quad k(0) = h'(0) \neq 0.$$

定义  $B_1$  上的连续函数

$$\chi(y) = \frac{|y|^{\beta}|h'(y)|^2}{|h(y)|^{\beta}} = \frac{|h'(y)|^2}{|k(y)|^{\beta}}.$$

选择  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  使得对所有的  $y \in B_{\delta}(0)$  有

$$|\chi(y) - \chi(0)| \leq \epsilon.$$

由于  $k(0) = h'(0)$ , 所以  $\chi(0) = |h'(0)|^{2-\beta}$ ,

$$\begin{aligned}|\lim_{i \rightarrow \infty} G_{\Omega}(u_i) - |h'(0)|^{2-\beta} \lim_{i \rightarrow \infty} G_{B_1}(v_i)| &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} B_2^i(\delta) - \chi(0) \lim_{i \rightarrow \infty} G_{B_1}(v_i) \right| \\ &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_1} \frac{g(v_i(y))e^{bv_i(y)^2}}{|y|^{\beta}} (\chi(y) - \chi(0)) dy \right| \\ &\leq \epsilon G_{B_1}^{\sup}.\end{aligned}$$

由Trudinger-Moser嵌入可知  $G_{B_1}^{\sup} < \infty$ , 由于  $\epsilon$  任意给定, 所以有

$$G_{\Omega}^{\delta}(0) = |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}^{\delta}(0).$$

3). 由文献[4]有如下不等式成立:

$$F_{B_1}^{\delta}(0) < F_{B_1}^{\sup}.$$

那么对于序列  $\{u_i\} \in \mathfrak{A}(B_1)$ , 若  $\{u_i\}$  集中到 0, 那么至少存在一点  $u_n > 0$ , 使得  $g(u_n) > 0$ ,

$$G_{B_1}^\delta(0) = \int_{B_1} g(0) \frac{e^{bu^2}}{|x|^\beta} dx = 0 < \sup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} g(u_n) \frac{e^{bu(n)^2}}{|x|^\beta} dx = G_{B_1}^{\sup}.$$

由证明的 1). 2). 3). 部分, 得到如下结果:

$$G_\Omega^\delta(0) = |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}^\delta(0) < |h'(0)|^{2-\beta} G_{B_1}^{\sup} \leq G_\Omega^{\sup}.$$

上式表明函数  $G$  的最大序列集中状态不会发生, 由引理 3 说明函数  $G$  的最大序列是紧的, 即可证明此引理.  $\square$

类似于引理 3 的证明, 那么对于序列  $\{u_n\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  及  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . 若  $u_n \rightharpoonup u$ , 则存在一个子列使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega u \frac{f(u_n)}{|x|^\beta} \rightarrow \int_\Omega u \frac{f(u)}{|x|^\beta} = C(b, \beta) < \infty.$$

## 1.2 临界增长函数

**定义 3.**  $f(u)$  为临界增长函数, 且可写为  $f(u) = g(u)e^{b|u|^2}$ ,  $0 < b < 4\pi$ , 并满足如下条件:

(A1)  $g \in C^1(R)$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(t) > 0$ , 当  $t > 0$ , 且  $g(-t) = -g(t)$ .

(A2)  $f(t) < tf'(t)$ ,  $t > 0$ .

(A3)  $G(t) \leq M(f(t)t^{-1})$ , 这里  $G(x, t) = \int_0^t \frac{f(s)}{|x|^\beta} ds$ .

(A4)  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)e^{-\varepsilon t^2} = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)e^{\varepsilon t^2} = \infty$ .

**例:** 将  $\Omega$  上满足条件 (A1) – (A4) 的全体临界增长函数  $f(u)$  的集合表示为  $\Psi$ .

(i) 对于  $\delta > 0$ ,  $0 \leq \alpha < \min\{b, \varepsilon - \delta\}$ ,  $\beta = 0$  或  $\beta = 2$ ,  $n \in N$  有

$$f(u) = u^{2n+1} e^{-\alpha u^\beta} e^{bu^2} \in \Psi.$$

(ii) 对于  $\delta > 0$ ,  $0 \leq \alpha + \max\{b, \varepsilon - \delta\} \leq 4\pi$ ,  $\beta = 0$  或  $\beta = 2$ ,  $n \in N$  有

$$f(u) = u^{2n+1} e^{\alpha u^\beta} e^{bu^2} \in \Psi.$$

(iii) 特别的  $\alpha = 0$ ,  $n = 0$ ;  $f(u) = ue^{u^2} \in \Psi$ .

令  $f(u) = g(u)e^{b|u|^2}$  满足条件 (A1), 假设  $g'(x, u) \geq \frac{g(x, u)}{u}$ , 那么

$$\frac{f'(x, u)}{f(x, u)} = \frac{g'(x, u)}{g(x, u)} + 2bu > \frac{1}{u}$$

因此  $f(x, u)$  满足条件 (A2).

令  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} G(x, u) - G(x, \varepsilon) &= \int_\varepsilon^u g(x, t) \frac{1}{2bt} \frac{de^{bt^2}}{dt} dt \\ &\leq \frac{1}{2b} (f(x, u)u^{-1} - f(x, \varepsilon)\varepsilon^{-1}) \end{aligned}$$

那么存在一个常数  $M > 0$  使得  $G(x, u) \leq M f(x, u) u^{-1}$ ,  $(x, u) \in \Omega \times (0, \infty)$ . 因此  $f(x, u)$  满足条件 (A3).

对任意的  $p \in R$ ,  $e^{u^2} > u^p + c$  成立. 故条件 (A4) 自然成立.

若  $f(u)$  满足条件 (A1) – (A4), 则由条件 (A2) – (A4) 可知, 存在  $b \leq \tau \leq 4\pi$ , 使得

$$\frac{f(s)}{|x|^\beta} \leq C \exp(\tau |u|^2), \quad (x, u) \in \Omega \times R; \quad (2)$$

对于任意的  $u \geq R$ ,  $x \in \Omega$  存在一个正常数  $C$  使得

$$G(x, u) \geq C e^{\frac{1}{M} u}; \quad (3)$$

对于任意的  $|u| > R_0$ ,  $x \in \Omega$  存在  $R_0 > 0$ ,  $\theta > N$  使得有

$$\theta G(x, u) \leq u \frac{f(u)}{|x|^\beta}. \quad (4)$$

## 2 主要结果及证明

考虑如下特征值问题:

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^\beta}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

由文献[7]可知, 其存在主特征值  $\lambda_1 > 0$  及特征函数  $\psi_1 > 0$ . 由变分原理, 有

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in W_0^{1,2}(\Omega), \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^\beta} = 1 \right\}.$$

**定理 1.** 假设函数  $f$  是临界增长函数并且满足条件 (A1) – (A4) 及

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u \frac{f(u)}{|x|^\beta} \exp(-\tau |u|^2) \geq \gamma > \frac{C(b, \beta)}{r^2 M}, \quad r > 0, x \in \Omega. \quad (5)$$

$$f'(0) < \lambda_1, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

那么问题 (1) 存在非平凡解.

**定理 2.** (山路引理)  $H$  为实 Hilbert 空间并且  $I \in C^1(H, R)$ . 假设  $I \in C^1(H, R)$  满足 Palais-Smale 条件, 并假设:

(B1)  $I(0) = 0$ .

(B2) 存在一个常数  $r, a > 0$  使得  $\|u\| = r$ , 那么

$$I(u) \geq a.$$

(B3) 存在一个元素  $v \in H$ ,  $\|v\| > r$  使得

$$I(v) \leq 0.$$

定义

$$\Gamma := \{g \in C([0, 1]; H) \mid g(0) = 0, g(1) = v\}.$$

那么

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(g(t))$$

即为泛函 $I$ 的临界值.

**引理 4.** 假设条件(A1)(2)(6)成立, 则存在 $\epsilon, \mu > 0$ , 如果 $\|u\|_{W_0^{1,2}} = \mu$ , 则有

$$I(u) \geq \epsilon.$$

证明. 由条件(A1)(2)(6), 则存在 $2 < p, \lambda < \lambda_1, (x, u) \in R \times \Omega$ 使得

$$G(x, u) \leq \frac{\lambda}{2}|u|^2 + C|u|^p e^{\tau u^2}.$$

对下式应用Hölder不等式及Trudinger-Moser不等式, 有

$$\int_{\Omega} |u|^p e^{\tau u^2} dx \leq \left\{ \int_{\Omega} e^{\tau s |u|^2} dx \right\}^{\frac{1}{s}} \left\{ \int_{\Omega} |u|^{pr} dx \right\}^{\frac{1}{r}} \leq C|\Omega| \left\{ \int_{\Omega} |u|^{pr} dx \right\}^{\frac{1}{r}}$$

其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . 因此, 由上面两个不等式及第一特征值的定义和Sobolev嵌入, 可得

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 - C \|u\|_{W_0^{1,2}}^p.$$

由于 $\lambda < \lambda_1, 2 < p$ , 选择 $\|u\|_{W_0^{1,2}} = \mu > 0$ 使得 $I(u) \geq \epsilon$ , 条件(B2)成立.  $\square$

**引理 5.** 假设 $f(u)$ 满足(A1) – (A4), 对所有的 $u \geq 0$ , 且 $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ , 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $I(tu) \rightarrow -\infty$ 成立.

证明. 由(3)可知, 对于充分大的 $p > 2$ , 则存在一个正常数 $C$ 使得对于任意的 $u \geq 0$ 有

$$G(x, u) \geq Cu^p + c.$$

对于任意的 $u \geq 0, u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ 由上式可得

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2} \int |\nabla u|^2 - Ct^p \int |u|^p + C.$$

由于 $p > 2$ 因此对于 $t \rightarrow +\infty$ 有 $I(tu) \rightarrow -\infty$ , 条件(B3)成立.  $\square$

**定义 4.**  $u_M$ 表示Moser函数

$$u_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{1}{2}}, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{\log \frac{1}{|x|}}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}, & \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

令 $x_0 \in \Omega, r > 0$ 使得以 $x_0$ 为圆心半径为 $r$ 的球 $B(x_0, r) \in \Omega$ . 因此函数  $u_M(x) = u_M(x, x_0, r) = u_M(\frac{x-x_0}{r}) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\|u_M(x, x_0, r)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 1$ 且 $u_M(x, x_0, r)$ 的支集包含在 $B(x_0, r)$ 中.



定义 5.

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2\pi \log n e^{\frac{\tau C^2(b, \beta)}{2\pi} \log n (x^2 - x)} dx.$$

引理 6. 假设  $f(u)$  满足条件 (A1) – (A4), 则存在  $r > 0$  使得对于  $B(x_0, r) \subset \Omega$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u \frac{f(u)}{|x|^\beta} \exp(-\tau|u|^2) \geq \gamma > \frac{C(b, \beta)}{Mr^2},$$

成立. 那么存在  $n$  及常数  $C(b, \beta)$  使得

$$\max\{I(tu_M) : t \geq 0\} \leq C(b, \beta).$$

证明. 假设对于任意的  $n$ , 有

$$\max\{I(t_n u_M) : t \geq 0\} > C(b, \beta).$$

由引理4可知, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 存在某个  $t_n$  使得

$$I(t_n u_M) = \max\{I(tu_M) : t \geq 0\}.$$

因此

$$I(t_n u_M) = \frac{1}{2} t_n^2 - \int_{\Omega} G(x, t_n u_M) dx > C(b, \beta),$$

由于  $G(x, u) \geq 0$ , 那么

$$t_n^2 > 2C(b, \beta).$$

因为  $\frac{\partial I(tu_M)}{\partial t} = 0$ , 令  $t = t_n$  则有

$$t_n^2 = \int_{\Omega} t_n u_M \frac{f(t_n u_M)}{|x|^\beta} dx.$$

由引理3可知存在  $u \in \Omega$  使得

$$C(b, \beta) = \int_{\Omega} t_n u_M \frac{f(t_n u_M)}{|x|^\beta} dx = \int_{\Omega} u \frac{f(u)}{|x|^\beta} dx > 2C(b, \beta).$$

令

$$A_1 = \{x \in B(x_0, r) : t_n u_M \geq r_\epsilon\} \quad A_2 = B(x_0, r) \setminus A_1.$$

由条件(5), 可得

$$u \frac{f(u)}{|x|^\beta} \geq (\gamma - \epsilon) e^{\tau u^2}$$

由上式及  $t_n^2 = \int_{\Omega} t_n u_M \frac{f(t_n u_M)}{|x|^\beta} dx$ , 可知, 存在一个  $\epsilon > 0$  使得

$$t_n^2 \geq (\gamma - \epsilon) \int_{B(x_0, r) \setminus A_2} e^{\alpha_0 |t_n u_M|^2} dx + \int_{A_2} t_n u_M \frac{f(t_n u_M)}{|x|^\beta} dx.$$

对于所有的  $x \in B(x_0, r)$ ,  $u_M(x) \rightarrow 0$  及其特征函数在  $B(x_0, r)$  中几乎处处  $\chi_{B_2}$

$\rightarrow 1$ . 因此由Lebesgue控制收敛定理, 有

$$\int_{A_2} t_n u_M \frac{f(t_n u_M)}{|x|^\beta} dx \rightarrow 0$$

及

$$\int_{A_2} e^{\tau |t_n u_M|^2} dx \rightarrow \pi r^2, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

注意到

$$\int_{B(x_0, r)} e^{\tau |t_n u_M|^2} dx \int_{B(x_0, r)} e^{\tau C^2(b, \beta) |u_M|^2} dx = r^2 \int_{B(x_0, 1)} e^{\tau C^2(b, \beta) |u_M|^2} dx$$

及

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, 1)} e^{\tau |t_n u_M|^2} &= \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} e^{\tau C^2(b, \beta) (\log n)^2} + \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq 1} e^{\tau C^2(b, \beta) \frac{(\log |x|)^{-2}}{\log n}} \\ &= \pi n^{\frac{\tau C^2(b, \beta)}{2\pi} - 2} + \int_{\frac{1}{n}}^1 2\pi r e^{\tau C^2(b, \beta) \frac{(\log |r|)^{-2}}{\log n}} dr \\ &= \pi n^{\frac{\tau C^2(b, \beta)}{2\pi} - 2} + \int_0^1 2\pi \log n e^{\frac{\tau C^2(b, \beta)}{2\pi} \log n (s^2 - s)} ds, \end{aligned}$$

最后一项积分使用变量变换  $s = \frac{\log |r|^{-1}}{\log n}$ . 因此对于  $t_n^2$  我们有

$$\begin{aligned} C(b, \beta) = t_n^2 &\geq (\gamma - \varepsilon) r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2\pi \log n e^{\frac{\tau C^2(b, \beta)}{2\pi} \log n (s^2 - s)} ds \\ &= (\gamma - \varepsilon) r^2 M, \quad \text{对于任意的 } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

因此

$$\gamma \leq \frac{C(b, \beta)}{M r^2}$$

与(5)矛盾. □

### 定理1的证明:

由引理4引理5及山路引理可知存在  $c > 0$  和一个Palais-Smale序列  $(u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega)$  使得  $I(u_n) \rightarrow c$ ,  $I'(u_n) \rightarrow 0$ . 由引理3可知  $\int u \frac{f(u)}{|x|^\beta} \leq C$ ,  $\int G(x, u) \leq C$ . 因此存在一个子列  $\{u_i\}$ , 假设

$$u_i \rightharpoonup u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega), u_i \rightarrow u_0 \in L^p(\Omega), p \geq 1.$$

由条件(A3)及Lebesgue控制收敛定理可得

$$G(x, u_i) \rightarrow G(x, u_0) \in L^1(\Omega).$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx &= 2(c + \int_{\Omega} G(x, u_0)) dx, \\ \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla w dx + \int_{\Omega} w \frac{f(u_0)}{|x|^\beta} dx &= 0, \end{aligned}$$

对所有的  $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$  成立, 因此  $u_0$  为问题(1)的弱解.

令  $c \leq 0$ , 由定理2的(B1), 引理4及Fatou引理, 那么

$$0 \leq I(u_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) \leq \mathcal{C}(b, \beta),$$

显然  $u_0 \equiv 0$  是问题(1)的解.

为了证明  $u_0 \neq 0$ , 假设  $u_0 \equiv 0$ . 那么存在一个序列  $u_k \rightarrow u_0$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} I'(u_k)u_k = 0$ .

令  $v_k = \frac{u_k}{\|\nabla u_k\|_{L^2}}$ , 那么其存在一个子列也表示为  $v_k$ , 使得  $v_k \rightharpoonup v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . 因此对于  $\lim_{k \rightarrow \infty} I'(u_k)u_k = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_k)u_k}{|x|^{\beta} \|\nabla u_k\|_{L^2}^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_k)v_k^2}{u_k |x|^{\beta}} dx = \int_{\Omega} \frac{f'(0)}{|x|^{\beta}} v^2 dx \\ &< \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{v^2}{|x|^{\beta}} dx \leq \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq 1 \end{aligned}$$

产生矛盾. 因此  $u_0 \neq 0$ . 故问题(1)存在非负解. 证明完毕.

### 3 结论

本文通过对奇异型Trudinger-Moser嵌入的研究, 证明了当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sup \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{|x|^{\beta}} dx$  上确界可达到性, 即引理3的描述. 对应于  $\frac{f(u)}{|x|^{\beta}}$  的非线性椭圆方程的解正是泛函  $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow R$  的临界点

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \int_0^u \frac{f(s)}{|x|^{\beta}} ds dx, \\ I'(u)v &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} \frac{f(u)v}{|x|^{\beta}} dx \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

因此,  $I(u) = c, I'(u) = 0$ , 泛函  $I$  满足Palais-Smale条件. 且泛函  $I(u)$  的上确界可以达到. 由山路引理, 非线性椭圆方程  $-\Delta u = \frac{f(u)}{|x|^{\beta}}$  的非负解存在范围可以确定  $[0, \mathcal{C})$ .

### 参考文献 (References)

- [1] N.S. Trudinger. On embeddings in to Orlicz spaces and some applications [J]. Math. Mech., 1967, 17 : 473-484.
- [2] J.Moser. A sharp form of an inequality by N. Trudinger [J]. Indiana Univ. Math., 1971, 20(11): 1077-1092.
- [3] Adimurthi, K.Sandeep. A singular Moser-Trudinger embedding and its applications[J]. Nonlinear Differential Equations Applications Nodda, 2007, 13(5):585-603.
- [4] G.Csató, P.Roy. Extremal functions for the singular Moser-Trudinger inequality in 2 dimensions[J]. Calculus of Variations Partial Differential Equations, 2014, 54(2):2341-2366.

- [5] G.Csató, P.Roy. The Singular Moser-Trudinger Inequality on Simply Connected Domains[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2016(5).
- [6] M. João, B. do ó. Semilinear Dirichlet problems for the N-Laplacian in  $R^N$  with nonlinearities in the critical growth range[J]. Differential Integral Equations, 1996, 9(5):967-979.
- [7] L.C.Evans. Partial differential equations[M]. Interscience, 1964.