

北太天元在微分方程数值解中的应用

肖剑^{1,2}, 龚劬^{1,2}, 温罗生^{1,2}

(1. 重庆大学数学与统计学院;

2. 重庆市数学实验教学示范中心)

摘要: 在科学计算领域, MATLAB 软件处于垄断地位, 国内的科研和教学使用可能受限。北太天元是一款国产替代软件, 能满足国内科学计算的需要。本文以微分方程数值解为例, 针对数值求解的三阶龙格库塔法, 采用北太天元软件来编程实现, 所得结果与 MATLAB 软件一致。北太天元软件可在国内的数值计算教学和科研实践中推广使用。

关键词: 高等教育学; 北太天元; 微分方程; 龙格-库塔法; MATLAB

中图分类号: G642.0

The Application of Baltamatica in the Numerical Solution of Differential Equations

XIAO Jian^{1,2}, GONG Qu^{1,2}, WEN Luo Sheng^{1,2}

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331;

2. Chongqing Experimental Teaching Demonstration Center for Mathematics, Chongqing 401331)
Abstract: In the field of scientific computing, MATLAB software holds a monopolistic position, and its use in domestic research and teaching may be restricted. Baltamatica is a domestic alternative software that can meet the needs of domestic scientific computing. This paper takes the numerical solution of differential equations as an example, and uses the Baltamatica software to program and implement the third-order Runge-Kutta method for numerical solution. The results obtained are consistent with those of MATLAB software. The Baltamatica software can be promoted and used in domestic numerical computing teaching and research practice.

Key words: Higher Education; Baltamatica; Differential equation; Runge-Kutta method; MATLAB

0 引言

微分方程是描述动态系统变化规律, 反映未知函数与其导数关系的重要数学模型。常微分方程的数值求解算法有欧拉公式、改进欧拉公式、龙格-库塔法^[1]、线性多步法、吉尔法、变步长算法等。也有学者提出了更多的常微分方程数值求解新算法, 如黑亚芳等提出了求解微分方程的神经网络法, 为微分方程求解提供了一种新途径^[2]。谢正荣等采用改进 PM 算法, 完成了对 I/II/III 型和混合型常微分方程边值问题的数值求解^[3]。微分方程的数值求解, 因计算工作量大, 需要用到软件工具。科技工作者已经使用一些卓有成效的软件来计算微分方程数值解, 如周潜、欧宜贵采用 MATLAB 软件来求解导弹追踪问题^[4]。张倩等用 MATLAB 软件来辅助微分方程教学^[5]。刘相等引入 MATLAB 软件, 实现了常微分方程的数值求解^[6]。张春利用 MAPLE 软件讨论微分方程的平衡点、平衡点类型及分岔^[7]。孔祥强基于 Mathematica 软件实现了微分方程数值解的三种算法并进行了可视化^[8]。刘宣亮将 XPPAUT 软件的数值计算功能应用到常微分方程的教学中^[9]。杨震等基于 Python 语言设计了单隐层神经网络算法来求解微分方程数值解^[10]。

作者简介: 肖剑 (1975-), 男, 副教授, 硕导, 主要研究方向: 复杂系统建模及控制. E-mail: xj4448@sina.com

在微分方程的算法实现中, MATLAB 使用较多^[11], 但该软件为商业软件, 采购价格昂贵, 部分高校受限也无法使用。北太天元是我国自主研发的科学计算与系统仿真软件, 打破国外同类软件 (MATLAB) 的封锁, 为国内用户提供安全可控的国产化替代方案。在北太天元的推广及应用方面, 李迪、周金钢向国内同行介绍北太天元软件的发展历程及主要功能^[12]。向导等将北太天元/真元应用到智能汽车模拟仿真中汽车防抱死系统(ABS)^[13]。江雪、黄秋梅讨论了北太天元在数值计算方法教学中的应用^[14]。从目前的文献报道来看, 北太天元的教学和科研实践还不多, 有待进一步探索。

本文基于北太天元软件对微分方程的数值解进行实践, 针对三阶龙格-库塔法, 编写北太天元程序, 同时用 MATLAB 软件的 ode23 函数编程进行对比, 说明北太天元软件在微分方程数值求解领域的有效性。

1 北太天元简介

北太天元是 2022 年发布的一款面向科学计算与工程计算的国产通用型科学计算软件, 具有自主知识产权。该软件由北京大学重庆大数据研究院数值计算实验室打造, 实现了从架构设计到关键核心技术的完全独立自主研发。2024 年发布的北太天元 V3.5 版本进一步拓展功能边界, 新增信号处理、统计分析、控制系统等专业工具箱。北太天元技术成果成功入选工信部发布的第一批先进适用技术推广目录, 并纳入科技部国家重点研发计划专项支持体系。北太天元的出现填补了国内在科学计算软件领域的空白, 为国产软件提供了底层计算引擎与环境, 支持各领域的人才培养与科技发展。

2 微分方程数值解

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

引入自变量取值点列 $\{x_n\}$, $h = x_n - x_{n-1}$ 称为步长, 微分方程的精确解记为 $\{y(x_n)\}$, 不一定存在。为了寻求 $y(x_n)$ 的近似值 y_n , 要得到从 y_n 到 y_{n+1} 的递推公式

$$y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n, h), \quad (2)$$

利用该公式算出的 (x_n, y_n) 就称为该微分方程的数值解。

3 龙格-库塔法原理

利用泰勒展式将 $y(x+h)$ 在 x 处展开, 并取其前面若干项来近似 $y(x+h)$ 而得到如下公式:

$$y(x+h) \approx y(x) + h\phi(x, y(x), h). \quad (3)$$

龙格-库塔方法（简称 R-K 方法）就是由上式产生的迭代公式：

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, L$$

若 $y(x+h) - [y(x) + h\varphi(x, y(x), h)] = O(h^{p+1})$ ，则称以上迭代公式为 p -阶公式， p 的大小反映了截断误差的高低，高阶对应高精度。要得到一个 p -阶公式，关键在于如何选取 $\varphi(x, y(x), h)$ 使之满足阶的要求。

4 三阶龙格-库塔法

将 $y(x_n + h)$ 在 x_n 处的泰勒展式展开到三阶

$$y(x_n + h) = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + O(h^4).$$

其中导数可以通过 f 表示

$$\begin{aligned} y'_n &= f(x_n, y_n), \\ y''_n &= \frac{df}{dx} = f_x + f_y y'_n = f_x + ff_y, \\ y'''_n &= \frac{d^2 f}{dx^2} = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2. \end{aligned}$$

假设 3 阶 RK 方法有以下形式

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1), \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3). \end{aligned}$$

将 k_2 和 k_3 在 (x_n, y_n) 处展开

$$k_2 = f + c_2 h f_x + a_{21} h f f_y + \frac{h^2}{2} (c_2^2 f_{xx} + 2c_2 a_{21} f f_{xy} + a_{21}^2 f^2 f_{yy}) + O(h^3),$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f + c_3 h f_x + (a_{31} + a_{32}) h f f_y \\ &+ \frac{h^2}{2} [c_3^2 f_{xx} + 2c_3 (a_{31} + a_{32}) f f_{xy} + (a_{31} + a_{32})^2 f^2 f_{yy} + 2a_{32} c_2 (f_x f_y + f f_y^2)] + O(h^3) \end{aligned}$$

将 y_{n+1} 的表达式展开：

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3),$$

将其与精确解的泰勒展开式对比，要求 h 、 h^2 和 h^3 项系数匹配，得到以下方程：

(1) 一阶项匹配

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1,$$

(2) 二阶项匹配

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2},$$

$$b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{2},$$

100

(3) 三阶项匹配

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_2 c_2 a_{21} + b_3 c_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{3},$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}.$$

这是一个欠定方程组，有多组解。选择常用的一组参数：令 $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$, $a_{21} = \frac{1}{2}$,

105

$a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, 可得:

$$b_1 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \quad b_3 = \frac{1}{6}.$$

最终得到微分方程数值求解的 3 阶 RK 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3). \quad (4)$$

其中:

110

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2).$$

5 应用实例 1

求解一阶微分方程

115
$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x,$$

初始条件为 $y(0) = 0.5$ ，求解区间为 $[0,1]$ 。

(1) 北太天元实现的该微分方程三阶龙格库塔法求解程序：

% 北太天元 RK3 实现

```
115 f=@(x,y) y^2+x;
120 x0=0; y0=0.5;
x_end=1;
h=0.025;
x_rk3=x0:h:x_end;
y_rk3=zeros(size(x_rk3));
125 y_rk3(1)=y0;
for i=1:length(x_rk3)-1
k1=f(x_rk3(i),y_rk3(i));
k2=f(x_rk3(i)+h/2,y_rk3(i)+h/2*k1);
k3=f(x_rk3(i)+h,y_rk3(i)-h*k1+2*h*k2);
130 y_rk3(i+1)=y_rk3(i)+h*(k1+4*k2+k3)/6;
end
figure;
plot(x_rk3,y_rk3,'b*');
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
135 title('北太天元 RK3 结果 (h=0.025)');
grid on;
disp('RK3 在 x=1 处的解:'); disp(y_rk3(end));
```

得到微分方程数值解如下图：

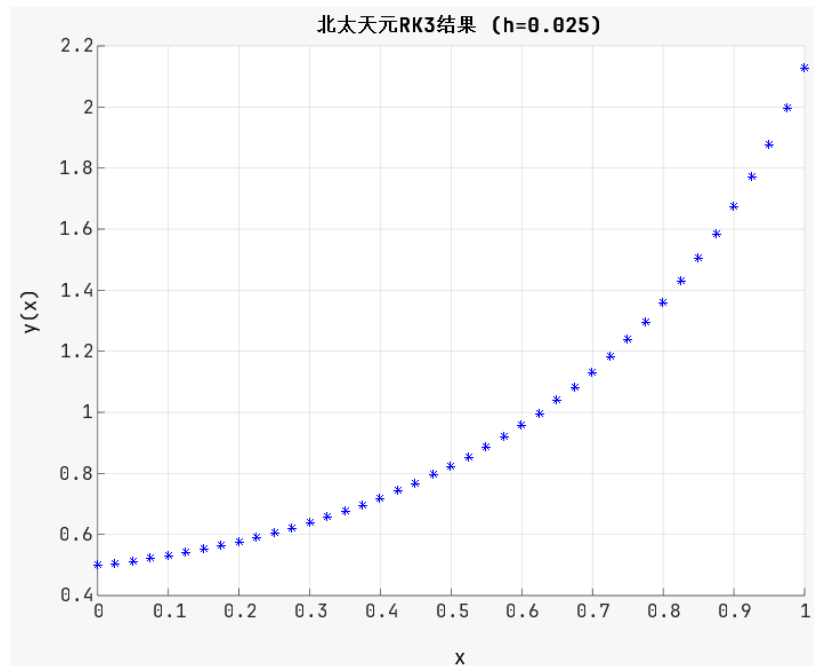


图 1 北太天元数值解曲线

Fig. 1 Numerical solution curve of Baltamatica

(2) 对上述微分方程, 用 MATLAB 的 ode23 来求解, 程序如下:

% MATLAB ode23 求解

f=@(x,y) y.^2+x;

xspan=[0 1];

y0=0.5;

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8); % 设置误差容限

[x_ode23,y_ode23]=ode23(f, xspan, y0, options);

figure;

plot(x_ode23, y_ode23, 'r-o');

xlabel('x'); ylabel('y(x)');

title('MATLAB ode23 求解结果');

grid on;

disp('ODE23 在 x=1 处的解:'); disp(y_ode23(end));

得到数值解如图 2:

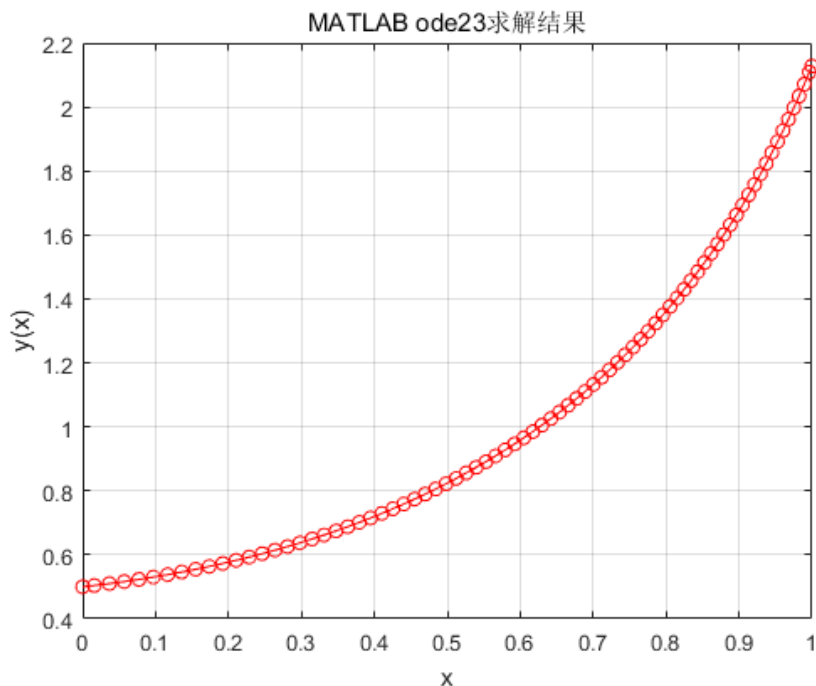


图2 MATLAB 数值解曲线

Fig. 2 MATLAB Numerical Solution Curve

(3) 将 RK3 与 ode23 的结果进行比较, 可以得到

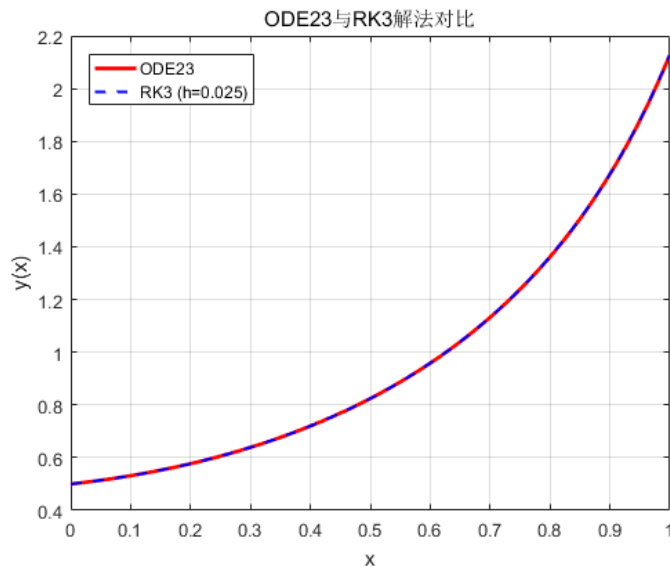


图3 北太天元与 MATLAB 数值解曲线对比

Fig. 3 Comparison of Numerical Solution Curves between Baltamatica and MATLAB

在 $x=1$ 处, RK3 与 ode23 得到的结果都为 2.1279, 在 $[0,1]$ 区间, RK3 与 ode23 的最大绝对差异为 1.26×10^{-4} , 从上述结果和图 3 可以看出北太天元 RK3 得到的结果与 MATLAB 基本一致。

6 应用实例 2

求解 Van der pol 方程

$x''(t) - \mu(1 - x(t)^2)x'(t) + x(t) = 0$, $x(0) = 2, x'(0) = 0$, 其中的参数 $\mu = 1$ 。

该微分方程无解析解, 只能求数值解, 先将该方程等价转换为一阶微分方程组。

170 令 $y_1 = x(t), y_2 = x'(t)$, 可以将上面的二阶微分方程转换为

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0$ 。

(1) 北太天元实现的微分方程三阶龙格库塔法求解程序

```
function vdp_solver()
175     % 参数设置
    mu=1.0;           % 参数值
    t_start=0;        % 起始时间
    t_end=20;         % 终止时间
    y0=[2; 0];        % 初始条件[y1(0); y2(0)]
180     h=0.01;        % 步长
    % 计算时间点
    t=t_start:h:t_end;
    n=length(t);
    Y=zeros(2, n);
185     Y(:,1)=y0;
    % RK3 方法
    for i=1:n-1
        k1=vdp_der(t(i), Y(:,i), mu);
        k2=vdp_der(t(i)+h/2, Y(:,i)+h/2*k1, mu);
190        k3=vdp_der(t(i)+h, Y(:,i)-h*k1+2*h*k2, mu);
        % 更新解
        Y(:,i+1)=Y(:,i)+h/6*(k1+4*k2+k3);
    end
    % 绘制图形
195     draw_results(t, Y);
end

function dydt=vdp_der(t, y, mu)
    dydt=zeros(2,1);
200     dydt(1)=y(2);
```



```
dydt(2)=mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);  
end  
  
function draw_results(t, Y)  
205     % 创建第一个图形窗口  
figure(1);  
% 位移随时间变化  
subplot(2,1,1);  
plot(t, Y(1,:), 'b');  
210 xlabel('时间 t');  
ylabel('位移 y');  
title('位移时间序列');  
grid on;  
% 速度随时间变化  
215 subplot(2,1,2);  
plot(t, Y(2,:), 'r');  
xlabel('时间 t');  
ylabel('速度 dy/dt');  
title('速度时间序列');  
220 grid on;  
% 创建第二个图形窗口  
figure(2);  
plot(Y(1,:), Y(2,:), 'k');  
225 xlabel('位移 y');  
ylabel('速度 dy/dt');  
title('相图');  
grid on;  
end
```

将全部代码保存为单个文件 vdp_solver.m，运行后可得结果

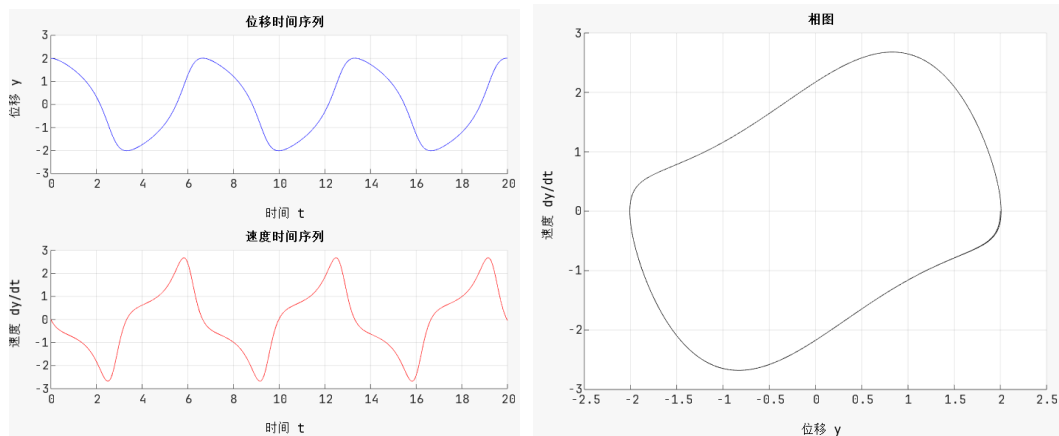


图 4 微分方程数值解及相图（北太天元）

Fig. 4 Numerical solutions of differential equations and phase diagrams (Baltamatica)

从图 4 的数值解曲线可知，位移和速度曲线均呈现等幅周期性振荡，验证了系统存在稳定的极限环。当参数 $\mu = 1$ 时，Van der Pol 方程有单一稳定极限环，与图 4 相图的结果一致，相图的闭合性和平滑性验证了北太天元 RK3 方法的计算精度足够捕捉系统长期行为。

(2) 用 MATLAB 的 ode23 来求解，与上面北太天元的结果进行对比，可得

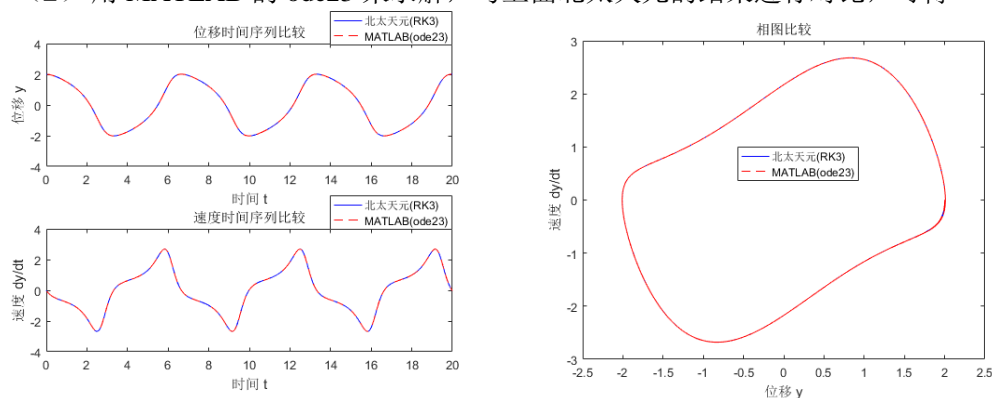


图 5 北太天元与 MATLAB 数值解曲线及相图对比

Fig. 5 Comparison of the numerical solution curves and phase diagrams of Baltamatica and MATLAB

从图 5 中可以发现，求解 Van der pol 方程时北太天元与 MATLAB 软件得到的数值解曲线及相图高度重合，印证了 Van der pol 方程的稳定极限环、非线性波形和振幅与频率一致性。在求解 Van der pol 方程的数值解时，北太天元可以替换 MATLAB 软件。

7 结论

本文在微分方程数值求解中引入国产科学计算软件北太天元，实现了微分方程数值解的经典算法三阶龙格-库塔法，与 MATLAB 软件的龙格-库塔函数 ode23 的计算结果进行比较，发现北太天元 RK3 得到的结果和 MATLAB 软件一致。今后可以在科学计算教学和科研中推广北太天元软件，加速推进科学计算软件的国产化实践。

[参考文献] (References)

- [1] Dormand J. R., Peter J. P. A family of embedded Runge-Kutta formulae[J]. Journal of

Computational and Applied Mathematics,1980,6(1): 19-26.

- 255 [2] 黑亚芳,胡建成.常微分方程的数值求解与方法[J].成都信息工程大学学报,2024,39(04):499-511.
- [3] 谢正荣,艾轶博,张卫冬.改进 PM 算法数值求解常微分方程边值问题[J].工程数学学报,2023,40(06):941-967.
- [4] 周潜,欧宜贵.应用问题驱动下的常微分方程教学探索[J].高等数学研究,2021,24(04):80-83+86.
- [5] 张倩,胡红娟,李慧珍.基于数学建模的常微分方程教学方法研究[J].信息系统工程,2021,(05):156-157+160.
- 260 [6] 刘相国,杨晓伟,王冬银.基于 MATLAB 的《常微分方程》教学研究[J].西安文理学院学报(自然科学版),2020,23(02):124-128.
- [7] 张春.浅谈 Maple 在常微分方程教学中的一些应用[J].数学学习与研究,2016,(21):10-10.
- [8] 孔祥强.基于 Mathematica 软件在常微分方程初值问题中的可视化[J].长春师范大学学报,2015,34(10):20-25.
- 265 [9] 刘宣亮.XPPAUT 软件在《常微分方程》教学中的应用[J].大学数学,2014,30(04):117-122.
- [10] 杨震,陈豫眉,李霜.基于 python 语言的一种常微分方程神经网络解法[J].绵阳师范学院学报,2020,39(05):78-84.
- [11] Shampine L. F., Reichelt M. W. The MATLAB ODE Suite [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1997,18(1), 1-22.
- 270 [12] 李迪,周金钢.北太天元的探索之路[J].数值计算与计算机应用,2025,46(01):24-43.
- [13] 向导,张敏,廖汉卿,等.基于北太天元/真元的汽车 ABS 控制系统算法研究[C]//中国仿真学会.第三十六届中国仿真大会论文集.北太振寰(重庆)科技有限公司;北京大学大数据分析与应用技术国家工程实验室;北京大学重庆大数据研究院,2024:320-325.
- 275 [14] 江雪,黄秋梅.北太天元在数值计算方法教学中的应用[J].数学的实践与认识,2024,54(02):226-231.