关于两类半群的凯莱图的消圈数

宋新阳，朱用文
（烟台大学数学与信息科学学院，烟台，264005）

摘要：本文所谓的中值定理，是指一个取值为整数的函数能够取得介于最大值与最小值之间的任何整数值。图论中的消圈数是最小消圈集的基数，所谓消圈集，就是图中顶点的子集合，去掉其中所有顶点以及相邻接的边后图中圈完全消失。本文讨论和研究模 n 剩余类半群和循环半群的凯莱图是否能满足中值定理。对于第一类模 n 剩余类半群的凯莱图，本文研究了 10 以内的模 n 剩余类半群，只有 n=6 时消圈数满足中值定理。本文证明了子集合的并集的消圈数一定大于等于每个子集合的消圈数取最大. 模 n 剩余类半群的消圈数介于 1 和 n 之间，当子集合只取零元时，消圈数为 1；子集合包含幺元时，消圈数为 n。对于第二类循环半群，本文证明了循环半群的消圈数不满足中值定理，循环半群的消圈数最大为 k-l，并且消圈数和消圈集以 k-l 为循环周期.

关键词：半群；凯莱图；消圈数；中值定理
中图分类号：O15

On the Decycling Number of Cayley Graphs of Two Classes of Semigroups

Song Xinyang, Zhu Yongwen
(School of Mathmatics and Information Sciences,Yantai University,Yantai,264005)

Abstract: In this paper, the so-called intermediate value theorem in this paper means that a function with a value of integers can get any integer value between the maximum value and the minimum value. The decycling number in graph theory is the cardinality of the minimum decycling set. Decycling set is a subset of vertices in a graph. All vertices and adjacent edges are removed. In this paper, we discuss and study whether Cayley graphs of modulo n residual class semigroups and cyclic semigroups satisfy the intermediate value theorem. For Cayley graphs of the first kind modulo n residue class semigroups, this paper studies the residual class semigroups modulo n within 10, and only n = 6 satisfies the intermediate value theorem. In this paper, we prove that the number of the union of subsets must be greater than or equal to the maximum number of the union of subsets. The number of the union of subsets is between 1 and n, and the number of the union of subsets is 1 when only consist of zero. When the subset contains the identity, the decycling number is n. For the second kind of cyclic semigroups, it is proved that the decycling number of cyclic semigroups does not satisfy the intermediate value theorem. The maximum decycling number of cyclic semigroups is k-l, and the decycling number and decycling set take k-l as the cycle period.

Key words: Semigroup graphs; Cayley graphskey; Decycling number; Intermediate value theorem

0 引言

半群代数理论是一个相对比较年轻的代数学分支，它最早研究于 20 世纪初期。半群图是半群通过代数组合而构造的。凯莱图是由集合 S 通过半群运算而生成的图，凯莱图的点集是集合 S 中的点，顶点通过半群运算后仍在在集合 S 中且与原来的点不同，那么原来的点和运算后的点之间的路径就可以视为凯莱图的边。半群的凯莱图是图论中的重要研究领域，它的性质被许多数学工作者讨论证明。例如朱用文教授[1][2][3]曾给出了半群的广义凯莱图的

作者简介：宋新阳（2002），女，数学与应用数学
通信联系人：朱用文（1965），男，教授，代数学. E-mail: zyw@ytu.edu.cn

概念和一些基本性质。

图论是组合数学的重要研究领域，最早起源于到欧拉对哥尼斯堡七桥问题的模型。图论的消圈数研究首先是从算法反馈研究的理论计算机科学提出的，有许多数学工作者研究了半群图的消圈数的中值定理，例如 Sheng Bau ·Benjamin van Niekerk ·David White[4]曾研究了脱普里兹图和群的凯莱图的消圈数是否满足中值定理。本文考虑研究两类重要半群的凯莱图的消圈数，这两类半群是模 n 剩余类半群和循环半群。我们考虑从简单的例子出发来研究这两类图的消圈数是否满足中值定理，并得到一些一般性结论。

1 基本定义

首先，为了便于读者理解，我们在此给出一些相关的基本定义。

定义 1.1.1[4] 设 S 是半群，$A\subset V\subseteq S$且|V|有限，A 是 S 的子集合。 广义脱普里兹图定义$G=T_V(A)$是满足

$$V(G)=V,E(G)=\{\{v,av\}:a\in A,av\in V\}。$$

称$V(G)$为半群图。

定义 1.1.2[5] 设 G=(V，E)为图，$A\subset V$，如果 G\A 是无圈的，那么称 A 为 G 的消圈集，G 的消圈数表示$\emptyset(G)$，是 G 的最小消圈集的基数。

例 1.1.3 如图 1 所示，半群图三角形 abca 构成一个圈，那么 G=(V，E)，其中$V=\{a,b,c\}$，$E=\{ab,bc,ac\}$。 如果去掉某一个顶点，不妨假设去掉顶点 a，则剩余的图 bc 是不能构成一个圈的。 那么顶点 a 自己所构成的集合 A，即$A=\{a\}$就是三角形 ABC 的消圈集，值得注意的是消圈集不唯一。 A 在半群图三角形 abca 中有三种可能，分别为$A=\{a\},A=\{b\},A=\{c\}$ 。 虽然消圈集 A 不相同，但 A 只包含了一个元素是不发生变化的，也就是说 A 的基数固定为 1，因此图三角形 abca 的消圈数为 1。

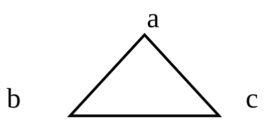

图 1 半群图三角形

Fig 1 The Cayley graphs of semigroups with triangles

定义 1.1.4[4] 设 S 是一个集合，设 f 是定义在 S 上的整数值函数。 设 a 为 f(x)定义在 S 上的最小值，b 为 f(x)定义在 S 上的最大值。使得$a,b\in X$，那么离散版本的中值定理是说，对于每一个整数 c，满足$a\le c\le b$， $c\in X$，是否都会存在一个元素$x\in S$，使得$f(x)=c$。如果存在，则称其满足中值定理，否则，则称不满足中值定理。

本文中的中值定理类似于数学分析中的连续函数的介值定理[6]。

定义 1.1.5[4] 设Γ是一个半群，设$S\subseteq\Gamma$，是它的一个子集合。 设 G 是一个图，满足$V(G)=\Gamma,E(G)=\{gh:h^{-1}g\in S\}$，图称为半群$\Gamma$的凯莱图，表示为 G=Cay($\Gamma$，S)。 特别地，当子集合 A 取为整个半群时，集合 S 通过半群的运算得到的凯莱图是完全凯莱图。

半群的凯莱图是有向图。 接下来我们对其进行一个简要的说明。

1 为 S 的幺元， $\forall a\in S$，$1\cdot a=a$，$a\cdot 1=a$， 则 a 经过半群的运算后，a 到 a 自身有一个圈。 因此，若子集合 S 包含幺元 1，那么它的消圈数为Γ群的元素个数。

接下来我们说明为什么半群的凯莱是有向图。 群一定存在逆元，而半群却不一定存在

逆元。 如果存在$a \to b$，也就是说$a \cdot x = b$，但是因为半群不一定会存在逆元，故a^{-1}不一定存在。 因此我们无法得到存在$b \to a$，从而说明了半群的凯莱图是有向图。

注意，我们已经论述了半群的凯莱图是有向图，以下所有例子和命题若无特殊说明，我们均默认为有向图。

简而言之，一个顶点经过半群运算，共三种情况。第一种情况，如果一个集合中的元素经过半群的运算还是它本身，那么它就是到自己的一个圈。第二种情况，如果集合中的元素经过半群运算后的点不属于该集合，得到的点是不能构成凯莱图的一条边的。第三种情况，当集合中的元素经过半群的运算得到了半群集合中的另外一个点，那么点和点之间的路径就构成了凯莱图的边。由此，我们可以得到了这个半群所生成的的凯莱图，再对其讨论凯莱图的消圈数即可。

2 模 n 剩余类半群

命题 2.1.1 模 4 剩余类半群的消圈数不满足中值定理。

证明 模 4 剩余类半群 $S=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\right\}$，设子集合为 A，消圈数为$\varphi$。

(1)$A=\left\{\overline{0}\right\}\subseteq S$，含有 $\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$，因此存在$0\to 0$的圈，$\varphi\left(\overline{0}\right)=1$；

(2)$A=\left\{\overline{1}\right\}\subseteq S$，含有 $\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$；$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$；$\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{2}$；$\overline{1}\cdot\overline{3}=\overline{3}$；因此存在$0\to 0$；$1\to 1$；$2\to 2$；$3\to 3$的路径，$\varphi\left(\overline{1}\right)=4$；

(3)$A=\left\{\overline{2}\right\}\subseteq S$，含有 $\overline{2}\cdot\overline{0}=\overline{0}$；$\overline{2}\cdot\overline{1}=\overline{2}$；$\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{0}$；$\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{6}=\overline{2}$；因此存在$0\to 0$；$1\to 2$；$2\to 0$；$3\to 2$的圈，$\varphi\left(\overline{2}\right)=1$；

(4)$A=\left\{\overline{3}\right\}\subseteq S$，含有 $\overline{3}\cdot\overline{0}=\overline{0}$；$\overline{3}\cdot\overline{1}=\overline{3}$；$\overline{3}\cdot\overline{2}=\overline{6}=\overline{2}$；$\overline{3}\cdot\overline{3}=\overline{1}$；，因此存在$0\to 0$；$2\to 2;1\to 3;3\to 1$的路径，如图 10 所示，$\varphi\left(\overline{3}\right)=3$；

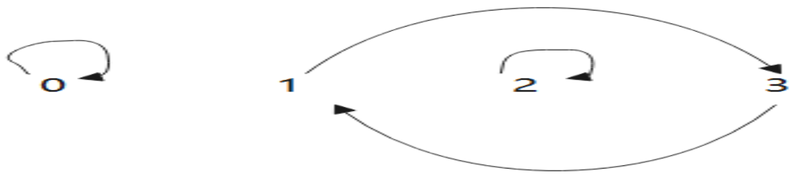

图 2 模 4 剩余类半群的凯莱图

Fig 2 modulo 4 residual class semigroups

显然，如果子集合中含有幺元 $\overline{1}$，那么它的消圈数必然为 4；

(5)$A=\left\{\overline{0},\overline{1}\right\}\subseteq S$，显然$\varphi\left(\overline{0},\overline{1}\right)=4$；

(6)$A=\{\overline{0},\overline{2}\}\subseteq S$，显然存在$0\to 0$；$1\to 0$；$2\to 0$；$3\to 0$；$1\to 2$；$3\to 2$的路径，$\varphi(\overline{0},\overline{2})=1$；

(6)$A=\{\overline{2},\overline{3}\}\subseteq S$，显然这种必然包含情况（3）和（4），因此消圈数必然$\geqslant\max(\varphi(\overline{2}),\varphi(\overline{3}))$，由于不含有$1\to 1$或者$3\to 3$的边，综上所述，$\varphi(\overline{2},\overline{3})=3$；

(7)$A=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}\subseteq S$，显然$\varphi(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3})=4$；

综上所述，我们可以得到如果模合数剩余类半群的子集合取幺元$\overline{1}$，那么它的每一个顶点都必然会包含到自身的一个圈。因此，它的消圈集它的消圈数就是顶点的个数，顶点的个数同时也是模合数剩余类半群的合数 n，$\varphi(\overline{1})=n$。显然，由情况（7），半群的完全凯莱图的消圈数为 4。

由上述例题，我们只需要找到消圈数为 2 的子集合 A 即可。子集合 A 一定不能含有$\overline{1}$或$\overline{3}$，否则，它的消圈数$\varphi(A)\geqslant 3$。而由例题，子集合不论为$\{\overline{0}\}$,$\{\overline{2}\}$,$\{\overline{0},\overline{2}\}$消圈数都不能为 2。因此综上所述，模 4 剩余类半群消圈数不能满足中值定理。

命题 2.1.2 模 n 剩余类半群，n 为合数。$\varphi(\overline{0})=1,\varphi(\overline{1})=n$，并且半群的完全凯莱图消圈数为 n。

简单来说，若子集合只有零元，消圈数为 1，若子集合包含幺元，消圈数为 n。

证明 由于$\overline{0}\cdot\overline{x}=\overline{0},\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{x}$。子集合取$A=\{\overline{0}\}$，故一定存在唯一一个圈$0\to 0$。子集合$A=\{\overline{1}\}$，存在 n 个圈。半群的完全凯莱图的子集合一定包含幺元，因此，它的消圈数也是 n。

命题 2.1.3 假设A_1,A_2,A_3分别为模 n 剩余类半群 S 的子集合，n 为合数，满足$A_1,A_2,A_3\subseteq S$，$A_1=A_2\cup A_3$，那么$\varphi(A_1)\geqslant\max(\varphi(A_2),\varphi(A_3))$。

证明 由于$A_1,A_2,A_3\subseteq S$，$A_1=A_2\cup A_3$，那么由A_2所生成的图的圈一定包含于A_1的图，也就是说A_2的消圈集一定包含于A_1，因此$\varphi(A_1)\geqslant\varphi(A_2)$。同理，$A_3$的消圈集一定包含于$A_1$，$\varphi(A_1)\geqslant\varphi(A_3)$。综上所述，命题 2.1.2 得证。

命题 2.1.4 n 为合数，模 n 剩余类半群生成的凯莱图的消圈数$1\leqslant\varphi(A)\leqslant n$。

证明 设x为模 n 剩余类半群中的一个元素。 由于$\overline{0}\cdot\overline{x}=\overline{0}$，无论子集合无论取什么元素，都一定会含有$0\rightarrow0$的圈，因此$\varphi(A)\geqslant1$。 当子集合包含幺元$\overline{1}$时，$\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{x}$，一定会含有$x\rightarrow x$的圈，故可以取得消圈数为 n 的情况。 而消圈集最多可以包含子集合的所有元素，不可能有 n+1 个元素，因此$\varphi(A)\leqslant n$。

命题 2.1.5 模 6 剩余类半群消圈数满足中值定理。

模 6 剩余类半群$S=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\right\}$，设子集合为 A，消圈数为$\varphi$，消圈集为$\xi$。

(1)$A=\left\{\overline{0}\right\}\subseteq S$，显然$\varphi\left(\overline{0}\right)=1$；

(2)$A=\left\{\overline{1}\right\}\subseteq S$，显然$\varphi\left(\overline{1}\right)=6$；

(3)$A=\left\{\overline{2}\right\}\subseteq S$，如图所示，含有$0\rightarrow0,2\rightarrow4,4\rightarrow2,1\rightarrow2,3\rightarrow0,5\rightarrow4$的路径，$\xi\left(\overline{2}\right)=\left\{\overline{0},\overline{2}\right\}$，显然$\varphi\left(\overline{2}\right)=2$；

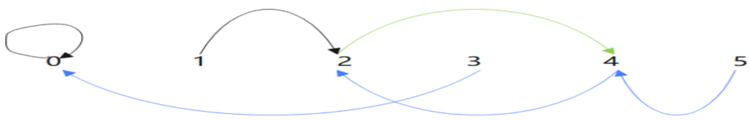

图 3 模 6 剩余类半群的凯莱图

Fig 3 modulo 6 residual class semigroups

(4) $A=\left\{\overline{3}\right\}\subseteq S$，含有$0\rightarrow0,1\rightarrow3,2\rightarrow0,3\rightarrow3,4\rightarrow0$，$5\rightarrow3$的路径，$\xi\left(\overline{3}\right)=\left\{\overline{0},\overline{3}\right\}$，显然$\varphi\left(\overline{3}\right)=2$；

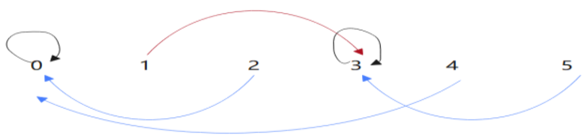

图 5 模 6 剩余类半群的凯莱图

Fig 5 modulo 6 residual class semigroups

(5) $A=\left\{\overline{4}\right\}\subseteq S$，含有$0\rightarrow0,1\rightarrow4,2\rightarrow2,3\rightarrow0,4\rightarrow4,5\rightarrow2$路径，$\xi\left(\overline{4}\right)=\left\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\right\}$，显然$\varphi\left(\overline{4}\right)=3$；

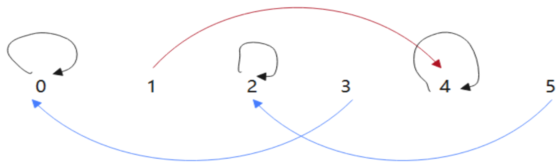

图 6 模 6 剩余类半群的凯莱图

Fig 6 modulo 6 residual class semigroups

(6) $A=\{\bar{5}\}\subseteq S$，含有 $0\to 0, 1\to 5, 2\to 4, 3\to 3, 4\to 2, 5\to 1$ 路径，$\xi(\bar{5})=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$，显然$\varphi(\bar{5})=4$；

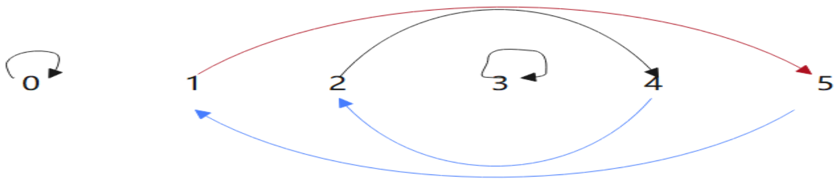

图 7 模 6 剩余类半群的凯莱图

Fig 7 modulo 6 residual class semigroups

接下来，模 6 剩余类半群的凯莱图是否满足中值定理的关键是否能找到子集合 A，使得经过半群乘法运算后生成的凯莱图的消圈数为 5。 接下来，我们考虑$A=\{\bar{4},\bar{5}\}$。

(7) $A=\{\bar{4},\bar{5}\}\subseteq S$，显然包含圈 $0\to 0, 2\to 2, 3\to 3, 4\to 4$，因此 $\xi(\bar{4},\bar{5})\supseteq\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$，同时，我们还可以得到路径$1\to 5, 5\to 1$，但不含有 $1\to 1$或者$5\to 5$，因此$\xi(\bar{4},\bar{5})=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$，显然$\varphi(\bar{4},\bar{5})=5$。

由此，我们可以得到模 4 剩余类半群的消圈数不满足中值定理，但模 6 剩余类消圈数满足中值定理。读者可自行证明，模 9 剩余类半群的子集合无论取什么元素，消圈数都无法取到 2。同理，模 8 剩余类半群也不能满足中值定理。综上，我们研究 10 以内的模 n 剩余类半群，只有 n=6 时，才能满足中值定理。

3 循环半群

定义 3.1.1 循环半群是一种特殊的半群，它有一个生成元a，使得半群中的每个元素都可以表示为a的幂次。

循环半群可以有限，也可以无限，为了便于研究循环半群的凯莱图的消圈数，我们研究有限的循环半群。

命题 3.1.2 循环半群 S 满足$a^5=a^3$，由循环半群 S 生成的凯莱图的消圈集不可能含有a,a^2。由循环半群 S 生成的凯莱图的消圈数最大为 2，不满足中值定理。

证明 S 为有限循环半群，只有一个生成元a，满足$a^5=a^3$，设 A 为子集合，$A\subseteq S$，设消圈集为ξ，消圈数为φ。

由于$a^5=a^3,a^6=a^5\cdot a=a^3\cdot a=a^4,a^7=a^6\cdot a=a^4\cdot a=a^5=a^3\ldots$因此，我们可以得到$S=\left\{a,a^2,a^3,a^4,a^3,a^4,a^3,a^4\ldots\right\}$。

（1）$A_1=\{a\}\subseteq S$，得到$a\cdot a=a^2;a\cdot a^2=a^3;a\cdot a^3=a^4;a\cdot a^4=a^5=a^3$；含有$a\to a^2,a^2\to a^3,a^3\to a^4,a^4\to a^3$边，$\xi(a)=\left\{a^3\right\},\varphi(a)=1$；

（2）$A_2=\left\{a^2\right\}\subseteq S$，经过半群运算，含有$a\to a^3,a^2\to a^4,a^3\to a^3,a^4\to a^4$边$\xi\left(a^2\right)=\left\{a^3,a^4\right\},\varphi\left(a^2\right)=2$；

（3）$A_3=\left\{a^3\right\}\subseteq S$，经过半群运算，含有$a\to a^4,a^2\to a^3,a^3\to a^4,a^4\to a^3$边，$\xi(a)=\left\{a^3\right\},\varphi(a)=1$；

（4）$A_4=\left\{a^4\right\}\subseteq S$，经过半群运算，含有$a\to a^3,a^2\to a^4,a^3\to a^3,a^4\to a^4$边$\xi\left(a^2\right)=\left\{a^3,a^4\right\},\varphi\left(a^2\right)=2$；

（6）$A_5=\left\{a,a^2,a^3,a^4\right\}\subseteq S$，$\xi\left(A_5\right)=\left\{a^3,a^4\right\},\varphi\left(A_5\right)=2$；

由于循环半群 S 的定义，a^2只可能指向a^3或a^4，而经过半群的运算以及 S 的定义，a^3只能指向a^3或a^4，同理，a^4只能指向a^3或a^4，因此，消圈集不可能包含a^2。 同理，也不可能包含a。

由命题 2.1.3，子集合 A 取 S 时，消圈数最大。 因此，考虑循环半群 S 的完全凯莱图。消圈集不可能包含a或a^2，因此，消圈数最大为 2。

循环半群 S 满足$a^5=a^3$，我们发现由循环半群 S 生成的凯莱图的消圈数奇偶交替，同时若去掉以a,a^2为顶点所连接的边，那么得到的凯莱图也满足奇偶交替。 因此，我们猜测对于$a^k=a^l,k\geqslant l$的循环半群的消圈数和去掉以$a,a^2\ldots a^{l-1}$的顶点所连接的边的凯莱图

也满足循环，且满足以$k-l$为循环周期。

接下来，我们考虑举一个例子进行验证。

例 3.1.3 S 为有限循环半群，只有一个生成元a，满足$a^6=a^3$，设子集合为 A，$A\subseteq S$，设消圈集为ξ，消圈数为φ。

由于$a^6=a^3,a^7=a^6\cdot a=a^3\cdot a=a^4,a^8=a^7\cdot a=a^4\cdot a=a^5\ldots$因此，我们可以得到$S=\left\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^3,a^4,a^5,a^3,a^4,a^5\ldots\right\}$。

（1）$A_1=\{a\}\subseteq S$，得到$a\cdot a=a^2;a\cdot a^2=a^3;a\cdot a^3=a^4;a\cdot a^4=a^5=a^3$；含有$a\to a^2,a^2\to a^3,a^3\to a^4,a^4\to a^3$边，我们发现$a^3\to a^4\to a^5\to a^3$为圈。$\xi(a)=\left\{a^3\right\},\varphi(a)=1$；

（2）$A_2=\left\{a^2\right\}\subseteq S$，含有$a\to a^3,a^2\to a^4,a^3\to a^5,a^5\to a^4,a^4\to a^3$边，我们发现$a^3\to a^5\to a^4\to a^3$为圈。$\xi\left(a^2\right)=\left\{a^3\right\},\varphi(a)=1$；

（3）$A_3=\left\{a^3\right\}\subseteq S$，含有$a\to a^4,a^2\to a^5,a^3\to a^3,a^4\to a^4,a^5\to a^5$边，我们发现$a^3\to a^3,a^4\to a^4,a^5\to a^5$为圈。$\xi\left(a^3\right)=\left\{a^3,a^4,a^5\right\},\varphi\left(a^3\right)=3$；

（4）$A_4=\left\{a^4\right\}\subseteq S$，含有$a\to a^5,a^2\to a^3,a^3\to a^4,a^4\to a^5,a^5\to a^3$边，我们发现$a^3\to a^4\to a^5\to a^3$为圈。$\xi\left(a^4\right)=\left\{a^3\right\},\varphi\left(a^4\right)=1$；

（5）$A_5=\left\{a^5\right\}\subseteq S$，含有$a\to a^3,a^2\to a^4,a^3\to a^5,a^5\to a^4,a^4\to a^3$边，我们发现$a^3\to a^5\to a^4\to a^3$为圈。$\xi\left(a^5\right)=\left\{a^3\right\},\varphi\left(a^5\right)=1$；

由上述命题，$a^6=a^3$的有限循环半群 S 的消圈集一定不包含a或a^2，因此消圈数一定会小于等于 3，故它的消圈数一定不满足中值定理。

显然，我们发现满足$a^6=a^3$的有限循环半群 S 的消圈数，半群 S 生成的凯莱图的圈，以及消圈集均是以 3 为循环周期的循环。 因此，结合$a^5=a^3$的有限循环半群，我们的猜测是正确的，我们接下来考虑归纳出一般情况，并给予证明。

通过上述例子和命题，我们可以得到更一般的结论。

命题 3.1.4 循环半群 S，如果满足$a^k=a^l,k>l$，那么循环半群 S 可以表示为

$S=\left\{a,a^2...a^{l-1},a^l...,a^{k-1},a^l,a^{l+1},...a^{k-1},a^l...\right\}$ 那么消圈集必然不含有 $a,a^2,a^3...a^{l-1}$。

证明 我们对该命题进行反证。 假设，如果消圈集含有a^{l-1}，那么一定包含一个从 $a^m\rightarrow a^{l-1}$，满足$m\geq l$，但是由于循环半群 S 的定义，显然不成立。

命题 3.1.5 消圈数最大为集合 S 的基数减去$l-1$，同时也是$k-l$。

证明 由命题 3.1.4，我们可以得到消圈集一定不含有$a,a^2,a^3...a^{l-1}$，而顶点共有$k-1$个，因此消圈数最大为$k-l$，接下来，我们只需要证明消圈数能够取到$k-l$即可。

消圈数取得最大值时，子集合$A\supseteq\left\{a^{k-l}\right\}$，满足

$$a^l\cdot a^{k-l}=a^k=a^l,a^{l+1}\cdot a^{k-l}=a^{k+1}=a^k\cdot a=a^l\cdot a=a^{l+1}...$$

故一定存在圈$a^m\rightarrow a^m$，$m\geq l$，消圈数为$k-l$，消圈集$\xi=\left\{a^l,a^{l+1}...a^{k-1}\right\}$。

命题 3.1.6 满足$a^k=a^l,k>l$的循环半群 S 生成的凯莱图，当子集合按照$a^x,x=1,2,3,...k-1...$逐一取时，则循环半群 S 的凯莱图的消圈数，消圈集以及去掉$a,a^2...a^{l-1}$为顶点所连接的边的凯莱图也满足循环，且循环周期为$k-l$。

证明 由命题 3.1.4 证明过程，我们可以得到消圈集只取a^{k-l}时，每个顶点到自身都有一个圈，即$a^l\rightarrow a^l$消圈数为$k-l$。假设消圈集只取a^{k-l+1}，则$a^l\cdot a^{k-l+1}=a^{k+1}=a^{l+1}$，也就是说从$a^l\rightarrow a^{l+1},a^{l+1}\rightarrow a^{l+2},...$假设消圈集只取$a^{2(k-l)}$，则$a^la^{k-l+k-l}=a^{2k-l}=a^k\cdot a^k\cdot a^{-l}=a^l$，即$a^l\rightarrow a^l$。这说明子集合只取$a^{k-l}$与$a^{2(k-l)}$得到的凯莱图的边在去掉前面$l-1$个顶点后是相同的。因此，命题得证，存在以$k-l$为循环周期的消圈集和消圈数。

命题 3.1.7 循环半群的消圈数不满足中值定理。

证明 由上述命题，显然满足$a^k=a^l,k>l$的循环半群 S 的消圈数一定取不到 S 的基数，也就是$k-l$。 因此循环半群的消圈数不满足中值定理。

4 结论

本文给出了模 n 剩余类半群的消圈数不一定满足中值定理，经过研究，10 以内只有模 6 剩余类半群的消圈数满足中值定理。本文证明了模 n 剩余类半群的消圈数的取值范围一定介于 1 和 n 之间，并集的消圈数一定大于等于每个集合消圈数取最大值。本文也给出了 $a^k=a^l,k>l$ 的循环半群 S 的消圈数，消圈集以 $k-l$ 为循环周期，消圈集一定不会取得 $a^m,m<l$，并且循环半群的消圈数不满足中值定理等结论。 本文探究了 10 以内的模 n 剩余类半群和循环半群，自然也可以研究更大的 n 时，是否还能满足中值定理？同理，也可以研究其他半群的消圈数是否也满足中值定理，例如双循环半群，矩阵半群等等。这些都有待于数学研究者的进一步探索。

[参考文献] (References)

[1] Yongwen Zhu. On transitive generalized Cayley graphs of semigroups[J]. Semigroup Forum, 2016,93(2):247-263.

[2] Yongwen Zhu. Generalized Cayley graphs of semigroups I[J]. Semigroup Forum, 2012, 84:131-143.

[3] Yongwen Zhu. Generalized Cayley graphs of semigroups II[J]. Semigroup Forum, 2012,84: 144-156.

[4] Sheng Bau.Benjamin van Niekerk. David White. An Intermediate Value Theorem for the Decycling Numbers of Toeplitz Graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 2014, 1492(3):2037-2042.

[5] Bau,S. , L. W. Beineke. The decycling numbers of graphs[J]. The Australasian Journal of Combinatorics, 2002,25:285-298.

[6] 华东师范大学数学科学学院编. 数学分析第五版上册[M]. 北京：高等教育出版社，2019.