

基于随机模型的汽车车身厂的生产性能研究

李莉, 陈燕婷

(湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082)

摘要: 在本文中我们研究的是由焊接装配零件的焊装线和用于上色喷涂的油漆生产线组成的两阶段生产系统, 这个系统可以由具有状态 (i, j) 的连续时间的马尔可夫过程刻画, 其中 i 和 j 分别表示焊装线和生产线的工作数量。这篇文章主要是利用第一象限内的随机游走来刻画分析此马尔可夫过程的平稳分布, 寻找平稳分布是否能够被表示为一系列几何乘积项的和。因此我们首先建立了这个生产系统在第一象限内随机游动模型, 然后再通过利用现有的检验算法来检验平稳分布是否能够表示为几何乘积项的线性组合, 最后我们通过所求的平稳分布对此生产系统的各项性能指标进行分析。

关键词: 双阶段生产系统; 第一象限内的随机游动; 性能指标; 串联排队系统

中图分类号: O226

Research on Production Performance of Automobile factory Based on Stochastic Model

Li Li, CHEN Yanting

(College of Mathematic and Economics, Hunan University, Changsha 410082)

Abstract: In this paper we study a two-stage production system consisting of a welded assembly line for welding assembly parts and a paint production line for color painting. This system can be modeled by a continuous time with a state of (i, j) Markov process, Where i and j indicate the number of jobs on the wire and line, respectively. This paper uses random walks in the quarter-plane to find the equilibrium distribution of the Markov process, and checks whether the sum of the equilibrium distributions that can be represented as a series of geometric terms. Therefore, we first establish a random walk model of the production system in the quarter-plane, and next we introduce an algorithm which checks whether the invariant measure of a given random walk is a sum of geometric terms. Finally, we analyze the performance measures of this production system through the equilibrium distribution that we have obtained.

Key words: Two-stage production system; random walk in the first quadrant; performance index; tandem queueing system

0 引言

近年来, 随着中国经济的飞速发展, 中国的服务业也在迅速增长, 因此提高服务业的管理水平、工作效率和质量是非常重要的。而排队论问题是优化管理的重要组成部分, 所以对排队论问题的研究是很有必要的。现在, 国内对于排队论的研究主要表现在交通、医院等服务行业。如城市信号交叉路口的管理[1], 眼科病床的安排[2]等。同时在创造业的调度[3、4]、库存管理[5、6]等问题上也有所研究。本文主要将排队理论应用到生活中的两梯队物流问题的研究中, 并且第一象限内随机游动问题又可以统一的刻画此类问题, 如果能够求得第

作者简介: 李莉 (1993-), 女, 在读硕士, 主要研究方向: 排队论

通信联系人: 陈燕婷 (1986-), 女, 硕导, 主要研究方向: 排队论. E-mail: yantingchen@hnu.edu.cn

一象限内随机游动平稳分布的解析表达式,那么就可以更加容易的求得排队问题中的各项性能指标。从而可以通过调整排队系统来进行优化管理。在我国很多大型制造企业中大都有分级生产线,这就构成了一个双阶段的生产系统,我们可以通过第一象限内随机游动的研究来求得此系统的各项性能指标,从而提高工作效率,优化其管理。如某汽车车身厂就有典型的两级分层生产线结构,即用于焊接装配零件的焊装线和用于上色喷涂的油漆生产线[3]。假设系统缓冲区的容量不受限制,根据数据分析发现原材料进入生产系统服从泊松分布,同时各阶段的加工时间服从指数分布,这样便可以将排队理论运用到此汽车车身厂的双阶段生产系统中[4]。串联排队模型能够解析存在生产系统中的复杂因素,并得出生产系统各项性能指标,进而为分析、提高生产系统的运行性能提供可靠的理论支持,因此对串联排队系统的平稳分布的求解也是非常重要。在文献[7]中介绍了平稳分布能够表示为几何乘积项之和的必要条件,在文献[8]中介绍了如何判断平稳分布是否能表示为几何乘积项之和的算法,并且说明了当平稳分布无法表示为几何乘积项之和时,我们需要通过数值逼近方法来求得其各类性能指标。本文利用第一象限内随机游动来对此汽车车身厂的生产系统的各项性能指标进行分析求解。

1 模型描述

在这一节中我们描述了[3]中研究的双阶段生产系统,并给出了相关概率的平稳方程的表达式,以及各项性能指标的分析[3]。

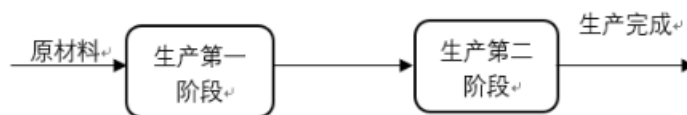


图1 串联队列过程

Fig.1 Tandem queue process

考虑如上图所示的两阶段生产系统。该系统由一个焊接装配原件的焊装线,一个用于上色喷涂的油漆生产线和一个无限的原件源组成,这些原件在系统启动后先在焊装线接受服务,然后在去往油漆生产线接受服务,服务完直接离开系统。其中原件到达焊装线是以速率为 λ 的泊松到达,在焊装线的服务时间是以 μ_1 为参数的指数分布,在油漆生产线的服务时间是以 μ_2 为参数的指数分布。根据以往的工作经验我们发现在此系统中焊装线的队列为空时,油漆生产线的服务速率 μ_2 要降低,从而。当油漆生 $\bar{\mu}_2 < \mu_2$ 产线为空时,原件的到达速率要提高,使得 $\bar{\lambda} > \lambda$ 。因此这个两阶段的生产系统可以建模为串联队列的排队系统,而第一象限内的随机游动问题可以刻画此类排队问题。从而可以通过这些理论知识来解决我们在生活中碰到的问题。

1.1 双阶段生产系统的随机游动模型

两阶段的生产系统可以被表示为具有状态 (i, j) 的连续时间的马尔可夫过程, $i, j = 0, 1, \dots$, 其中 i 表示焊装线的队列长度, 包括正在被焊装的原件, j 表示的油漆生产线的长度, 不包含正在被焊接的原件。这个过程构成了一个正常返、不可约的非周期性马尔科夫链, 其中转移速率如下图所示:

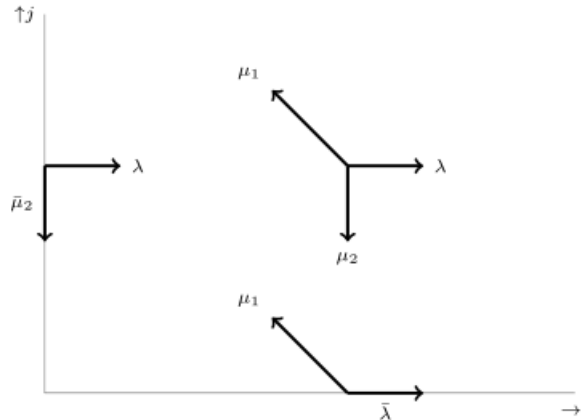


图 2 第一象限内的随机游动
Fig.2 Random walk in the quarter-plane

80 让 $m(i, j)$ 表示为马尔可夫过程的平稳分布, 则 $m(i, j)$ 需要满足以下平稳方程:

$$\eta m(i, j) = \lambda m(i-1, j) + \mu_1 m(i+1, j-1) + \mu_2 m(i, j+1) \quad i > 0, j > 0 \quad (1)$$

$$(\bar{\lambda} + \mu_1) m(i, 0) = \bar{\lambda} m(i-1, 0) + \mu_1 m(i, 1) \quad i > 0, j = 0 \quad (2)$$

$$(\lambda + \bar{\mu}_2) m(0, j-1) = \lambda m(1, j-1) + \bar{\mu}_2 m(0, j+1) \quad i = 0, j > 0 \quad (3)$$

$$\eta = \lambda + \mu_1 + \mu_2$$

在本文中, 为了明确起见, 我们假定焊装线和油漆生产线的服务规则是先到先服务 (FCFS)。而对平稳分布 $m(i, j)$ 能否被表示为几何乘积项的线性组合是我们这篇文章的主要目标。在下一小节中, 我们将会给出判断平稳分布 $m(i, j)$ 是否为几何乘积项之和的检验算法。

85 1.2 平稳分布检验算法

很多的双阶段生产系统的基础问题就是研究排队论问题, 而第一象限内的随机游动问题可以很好的刻画此类问题。如果能够求得第一象限内的随机游动的平稳分布的解析表达式, 那么就可以计算排队系统的各项性能指标。但是只有小部分的排队系统的平稳分布能够表示为几何乘积项之和, 因此我们需要通过一种方式来判断随机游动的平稳分布是否能表示为几何乘积项之和。接下来, 我们将介绍文献[8]中的一种算法, 用来检查给定的随机游动的平稳分布是否为几何乘积项的和。

在介绍算法前, 我们先引入几个多项式:

90

$$Q(x, y) = xy \left(\sum_{s=-1}^1 \sum_{t=-1}^1 x^{-s} y^{-t} p_{s,t} - 1 \right)$$

$$H(x, y) = xy \left(\sum_{s=-1}^1 x^{-s} h_s + y \left(\sum_{s=-1}^1 x^{-s} p_{s,-1} \right) - 1 \right)$$

$$V(x, y) = xy \left(\sum_{t=-1}^1 y^{-t} v_t + x \left(\sum_{t=-1}^1 y^{-t} p_{-1,t} \right) - 1 \right)$$

95

让曲线 Q, H, V 记为限制在 $[0, \infty)^2$ 中的 (x, y) 的集合，并且满足 $Q(x, y) = 0, H(x, y) = 0, V(x, y) = 0$ 。其中我们让 H_{set} 和 V_{set} 表示为 Q 与 H, Q 与 V 的交点，即：

$$H_{set} = \left\{ (x, y) \in (0, 1)^2 \mid (x, y) \in Q \cap H \right\}$$

$$V_{set} = \left\{ (x, y) \in (0, 1)^2 \mid (x, y) \in Q \cap V \right\}$$

100

检验算法：首先我们考虑的是一个随机游动 $R: p_{s,t}$ 表示的是随机游动内部的转移概率，

h_s, v_t 分别表示的水平方向和垂直方向的转移概率，其中 $s, t \in \{-1, 0, 1\}$ 。

第一步：先计算出 H_{set} 与 V_{set} 。

第二步：假设 $(\rho_1, \sigma_1) \in H_{set}$ 。我们按照如下方式构造集合 Γ_1^H ：使得 $\rho_{2k} \neq \rho_{2k-1}, \sigma_{2k} = \sigma_{2k-1}$ 以及 $\rho_{2k+1} = \rho_{2k}, \sigma_{2k+1} \neq \sigma_{2k}$ 对于 $k = 1, 2, 3, \dots$ ，重复这步骤直到 $(\rho_n, \sigma_n) \in (0, 1)^2, (\rho_{n+1}, \sigma_{n+1}) \notin (0, 1)^2$ 。将这具有 n 个元素的成对耦合集记为 Γ_1^H ，其中 $\Gamma_1^H = \{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_n, \sigma_n)\}$ 。然后对 H_{set} 的其它元素重复这过程，得到的成对耦合集记为 Γ_a^H ，其中 $a \leq 3$ 为 H_{set} 中元素的指标。

第三步：假设 $(\rho_1, \sigma_1) \in V_{set}$ 。我们按照如下方式构造集合 Γ_1^V ：使得 $\rho_{2k} = \rho_{2k-1}, \sigma_{2k} \neq \sigma_{2k-1}$ 以及 $\rho_{2k+1} \neq \rho_{2k}, \sigma_{2k+1} = \sigma_{2k}$ 对于 $k = 1, 2, 3, \dots$ ，重复这步骤直到 $(\rho_n, \sigma_n) \in (0, 1)^2, (\rho_{n+1}, \sigma_{n+1}) \notin (0, 1)^2$ 。且将这具有 n 个元素的成对耦合集记为 Γ_1^V ，其中 $\Gamma_1^V = \{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_n, \sigma_n)\}$ ，然后对 V_{set} 的其它元素重复这过程，得到的成对耦合集记为 Γ_b^V ，其中 $b \leq 3$ 为 V_{set} 中元素的指标。

第四步：检查来自成对耦合集的几何乘积项是否是以如下正确的方式成对的：

1、考虑 Γ_1^H ，如果存在 $k_0 \in \mathbb{N}_0$ 使得元素 $(\rho_{2k_0}, \sigma_{2k_0}) \in H_{set}$ ，则 R 的不变测度是几何乘积项之和，且不变测度是由集合 $\{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_{2k_0}, \sigma_{2k_0})\} \in \Gamma_1^H$ 诱导所得。我们对所有的 Γ_a^H 重复这一过程，其中 $a \leq 3$ 。

2、考虑 Γ_1^H ，如果存在 $k_0 \in \square_0$ 使得元素 $(\rho_{2k_0+1}, \sigma_{2k_0+1}) \in V_{set}$ ，则 R 的不变测度是几何乘积项之和，且不变测度是由集合 $\{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_{2k_0+1}, \sigma_{2k_0+1})\} \in \Gamma_1^V$ 诱导所得。我们对所有的 Γ_a^H 重复这一过程，其中 $a \leq 3$ 。

3、考虑 Γ_1^V ，如果存在 $k_0 \in \square_0$ 使得元素 $(\rho_{2k_0}, \sigma_{2k_0}) \in V_{set}$ ，则 R 的不变测度是几何乘积项之和，且不变测度是由集合 $\{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_{2k_0}, \sigma_{2k_0})\} \in \Gamma_1^V$ 诱导所得。我们对所有的 Γ_b^V 重复这一过程，其中 $b \leq 3$ 。

4、考虑 Γ_1^V ，如果存在 $k_0 \in \square_0$ 使得元素 $(\rho_{2k_0+1}, \sigma_{2k_0+1}) \in H_{set}$ ，则 R 的不变测度是几何乘积项之和，且不变测度是由集合 $\{(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2), \dots, (\rho_{2k_0+1}, \sigma_{2k_0+1})\} \in \Gamma_1^V$ 诱导所得。我们对所有的 Γ_b^V 重复这一过程，其中 $b \leq 3$ 。

第五步：如果第四步中没有一个条件成立，那么 R 的不变测度不是几何乘积项之和。

因此利用上面所述的检验算法我们可以检验随机游动的平稳分布能否被表示为几何乘积项之和，从而通过对平稳分布的分析来求解各项性能指标。

2 双阶段生产系统的各项性能指标分析

为了证明上述结论，我们对某汽车车身厂进行了一些研究，该汽车车身厂主要满足客户要求对汽车进行焊装和油漆上色服务，为解决生产系统的优化管理问题，借助串联排队模型对生产工作流程进行分析。我们收集到了该汽车车身厂的一些基本信息：

(1)在到达率方面，依据车身厂的电子系统记录和实际观察，我们获得了一天的不同情况下零件到达率的数据，具体数据如表所示。

(2)在服务率方面，对于排队系统的服务率，我们通过对一天的时间内的零件焊装和上色的服务时间的调查发现，一般情况下焊装的平均服务时间约为 $\eta_1 = 4$ 分钟，上色的平均服务时间约为 $\eta_2 = 20/7$ 分钟，但当队列长度发生变化时，两个阶段的服务时间也会发生变化，具体数据如下表。（表中 Q_1 表示第一阶段的队列长度， Q_2 表示第二阶段的队列长度， λ 表示零件的到达速率， μ_1 表示第一阶段的服务速率， μ_2 表示第二阶段的服务速率。）

表1 车身厂零件到达率与服务率
Tab. 1 Arrival rate and service rate of factory

参数	λ	μ_1	μ_2
Q_1, Q_2 均为空	0.10	0.25	0.35
Q_1 为空, Q_2 不为空	0.20	0.25	0.35
Q_1 不为空, Q_2 为空	0.10	0.25	0.25

根据本文第二部分所说的随机游动模型，并代入调研的数据，我们得到了该生产系统在第一象限内的随机游动平稳分布图如下所示：其中的转移概率为 $\lambda = p_{1,0} = 0.10$ ，

$\mu_1 = p_{-1,1} = 0.25$, $\mu_2 = p_{0,-1} = 0.35$, $\bar{\lambda} = h_1 = 0.20$, $h_0 = 0.55$, $\bar{\mu}_2 = v_{-1} = 0.25$, $v_0 = 0.65$, 其他的转移概率为 0。

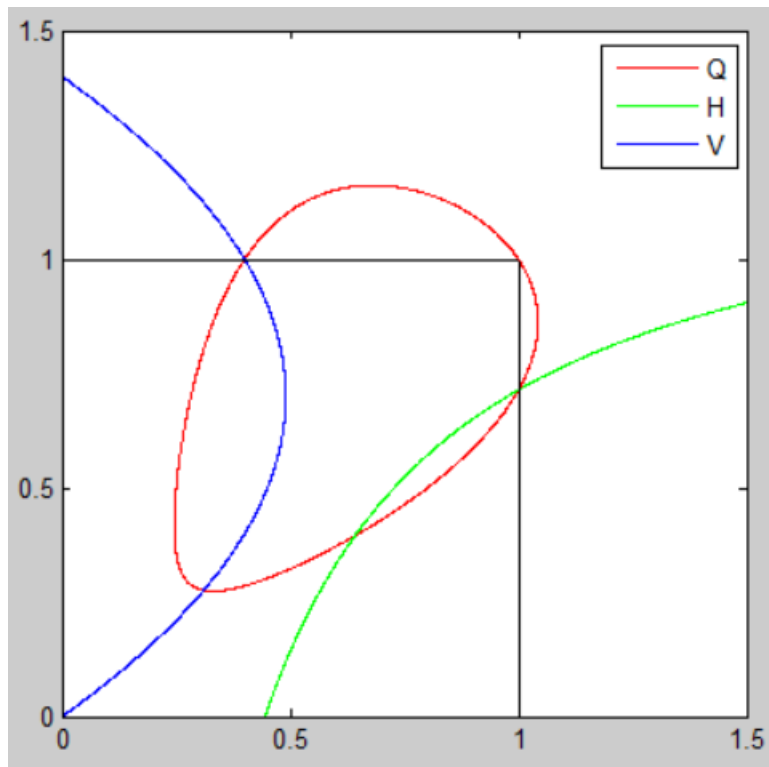


图 3 曲线 Q, H, V

Fig.3 Algebraic curves Q, H, V

150

通过利用上一节中的检验算法检验，由图三分析可以得到，该随机游动的平稳分布不能表示为几何乘积项的和。因此我们需要通过扰动随机游动，使得其能被表示为几何乘积项的和，从而逼近各项性能指标。

155

我们通过文献[8]中的方法扰动随机游动边界上的转移概率，然后可以得到扰动随机游动可表示为几何乘积项的和（可在参考文献[8]中了解更多细节）。扰动后的随机游动的转移概率为 $\lambda = p_{1,0} = 0.10$, $\mu_1 = p_{-1,1} = 0.25$, $\mu_2 = p_{0,-1} = 0.35$, $\bar{\lambda} = h_1 = 0.20$, $h_0 = 0.55$, $\bar{\mu}_2 = v_{-1} = 0.13$, $v_0 = 0.7429$, $v_1 = 0.02711$, 其他的转移概率为 0。得到的平稳分布图如下所示：

160

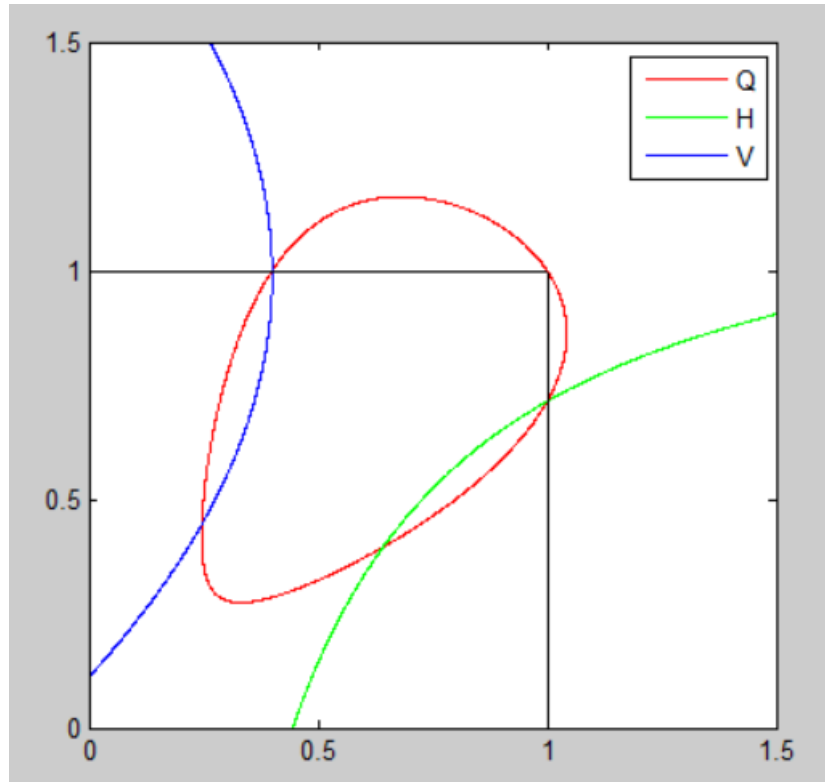


图4 曲线 Q, H, V

Fig.4 Algebraic curves Q, H, V

165 有图四分析可以得到，扰动随机游动的平稳分布是由三项几何乘积项组成，其中各项系数为 $\alpha_1=0.2050$ ， $\alpha_2=-0.4580$ ， $\alpha_3=0.4426$ ，因此我们可以将平稳分布表示为几何乘积项之和，即：

$$\begin{aligned} m(i, j) &= \alpha_1 \rho_1^i \sigma_1^j + \alpha_2 \rho_2^i \sigma_2^j + \alpha_3 \rho_3^i \sigma_3^j \\ &= 0.2050(0.6418)^i (0.3954)^j - 0.4580(0.2464)^i (0.3954)^j \\ &\quad + 0.4426(0.2464)^i (0.4452)^j \end{aligned}$$

170 从而我们也可以通过扰动的随机游动来找到该系统中某些性能指标的误差范围：

(1) F1（该系统中为空的概率）的误差边界：

$$\min\left([F_1]_{up}\right) = 0.3017, \max\left([F_1]_{low}\right) = 0.1818$$

(2) F2（该系统中第一阶段队伍的平均长度）的误差边界：

$$\min\left([F_2]_{up}\right) = 1.9324, \max\left([F_2]_{low}\right) = 1.7013$$

175 (3) F3（该系统中第二阶段队伍的平均长度）的误差边界：

$$\min\left([F_3]_{up}\right) = 0.8513, \max\left([F_3]_{low}\right) = 0.4625$$

对于汽车车身厂的具体情况，我们可以根据实际情况来建模分析，如果系统中的随机游动的不变测度能够被表示为几何乘积项，那我们就可以直接求得该系统的一些性能指标。如果随机游动的不变测度不能表示为几何乘积项的和，那就通过扰动随机游动从而求得其误差

180 边界。我们通过对系统中的性能指标的求解以及研究，可以得到汽车车身厂的其他一些具体信息，从而优化汽车车身厂生产系统的管理。

3. 结论

185 本文以汽车车身厂的双阶段生产系统为研究背景，利用串联排队的知识，对汽车车身厂的双阶段生产系统建立相应的数学模型，并对模型的相关参数进行计算和分析，为汽车车身厂的管理和优化提供了理论依据。

本文通过对汽车车身厂的研究，所做的工作和得到的结论主要有以下两个方面：

1、本文对汽车车身厂的排队系统进行特征分析后，收集和整理了车身厂的原件到达情况、服务时间等数据，通过对其分析，建立了第一象限串联队列的随机游动模型，并对该数学模型进行计算和分析。

190 2、通过分析后，考虑到现实生活的实际情况，把数学模型应用到实际应用中。通过已建立的数学模型，求得该系统的平稳分布，在计算出该系统为空、第一阶段队列长度以及第二阶段队列长队等性能指标的误差边界。根据所求的误差边界，调节系统，优化系统。

195 [参考文献] (References)

- [1] 黄建瑞.浅谈城市信号交叉路口排队论的应用[J].城市建设理论研究（电子版）,2012,(27).
- [2] 梁洁, 冯迎迎. 眼科病床合理安排--排队论的应用[J]. 电脑知识与技术, 2010 (5): 76.
- [3] 安玉伟,严洪森.一类两阶段生产系统生产计划与调度的集成优化[J].计算机集成制造系统,2012,18(04):796-806.
- 200 [4] 钟远晖,严洪森,童合明.企业信息集成环境下的车身生产线调度的实现[J].工业控制计算机,2003,16(8):3-5.
- [5] 费晴怡,孔楠,赵林度.基于排队论的延迟产品差异化的投资决策优化（英文）[J].Journal of Southeast University(English Edition),2018,34(04):532-539.
- [6] 藺宇,李雅娇,史英杰.基于排队论的两阶段生产系统看板数量优化[J].工业工程,2017,20(1):71-76.
- 205 [7] Y.Chen,R.J.Boucherie,and J.Goseling.Invariant measures and error bounds for random walks in the quarter-plane based on sums of geometric terms.Queueing systems,84(1-2): 21-84,2016.
- [8] random walks in the quarter-plane : representation in geometric terms. Probability in the Engineering and Informational Sciences,29 (02) : 233-251,2015.