

基于鲁棒性的自由曲面结构优化设计研究

赵兴忠, 苗闯, 高博青, 董石麟

(浙江大学建筑工程学院, 杭州 310058)

摘要: 由于造型复杂、受力不明确, 自由曲面结构的形状、拓扑难以确定, 安全性能要求高。为使造型与受力性能相协调, 本文以结构非线性 H^∞ 鲁棒性指标为目标, 以参数化曲面创建方法——NURBS 控制点坐标以及自由曲面划分单元厚度为优化变量, 采用差分演化算法求解了自由曲面形状和材料分布联合优化设计问题, 得到了最优的曲面形状和拓扑构型。结果表明, 差分演化算法具有很强的寻优能力, 同时, 通过优化设计调整或改变曲面的形状和材料分布, 可大幅提高曲面的鲁棒性和刚度, 改善结构的受力性能。此外, 通过六角星形穹顶结构的非线性屈曲分析, 阐述了鲁棒性指标与应变能指标的联系和区别, 表明鲁棒性指标能够较好地反映结构的屈曲过程, 可以表征屈曲破坏后果。

关键词: 自由曲面结构; NURBS; 结构鲁棒性; 形状; 材料分布; 联合优化

中图分类号: TU393.3

Optimization design research about free-form structures based on robustness

ZHAO Xingzhong, MIAO Chuang, GAO Boqing, DONG Shilin

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058)

Abstract: Because of the complexity in modeling and the uncertainty under stress, it is difficult to determine the shape and topology of free-form structures to ensure high safety performance requirements. In order to coordinate architectural forms and mechanical behavior of free-form surface structures, this paper adopts differential evolution optimization algorithm to solve the combined optimization problem about surface shape with material distribution. Optimal surface shape as well as topology configuration is obtained. In the process of optimization, the nonlinear structural H^∞ robustness evaluating index is used as optimization goal, coordinates of the parameterized free-form surface creation method based on NURBS and thickness of meshed surface elements are used as optimization variables. The optimization results show that differential evolution algorithm has strong optimization ability and the optimization design method by adjusting the shape and material distribution of surface can significantly improve both robustness and rigidity of the structure. In addition, through nonlinear buckling analysis about hexagonal star dome, this paper expounds the connection and difference between robustness index and strain energy index. It's concluded that robustness index can better reflect the buckling process of structure and represent buckling destruction consequences.

Key words: free-form structures; NURBS; structural robustness; shape; material distribution; combined optimization

0 引言

自由曲面的造型是决定其受力性能的重要因素, 自由曲面结构外形复杂, 且多用于公共建筑, 安全性至关重要。随着数学优化方法发展及计算机软硬件水平的提升, 通过优化方法调整曲面的形状, 提高结构的力学性能成为可能。对此, 崔昌禹等^[1]提出高度调整法, 以曲面上节点的高度为优化变量, 但受到有限元网格数量的限制, 变量规模大, 需要通过拟合优

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51178414); 高等学校博士学科点专项科研基金(20120101110023)

作者简介: 赵兴忠(1989-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 大跨度空间结构

通信联系人: 高博青(1963-), 男, 教授, 主要研究方向: 大跨度空间结构. E-mail: bqgao@zju.edu.cn

化结果才能形成连续光滑的曲面；NURBS^[2]是描述自由曲面的形状，进行曲面创建的有力工具，能够参数化描述任意复杂曲面，对此，李欣等^[3]给出了自由曲面应变能对 NURBS 控制点和权因子的一阶近似梯度，提出的 NURBS-GM 方法具有变量少、曲面连续等特点；Lee 等^[4]指出，对线弹性、小位移假定下的曲面优化结果，进行非线性屈曲承载力验算后发现，优化结构的屈曲荷载可能会大幅低于优化前，因此优化过程中考虑结构的非线性影响是十分必要的。

结构的鲁棒性^[5]定义为其抵抗不相称破坏的能力，目前，从参数敏感性^[6]、冗余度^[7]、抵抗意外局部破坏能力^[8]等多种角度，对其进行了分析。但是，为实际应用提供统一的标准，需要给出定量的结构鲁棒性评价指标。张成等^[9]基于 H_∞ 控制理论，以结构系统传递函数的 H_∞ 范数，作为结构鲁棒性的定量评价指标，能够有效地反映外部干扰、结构本身不确定性、冗余度等对结构鲁棒性的影响。

本文基于 H_∞ 鲁棒控制理论，建立了自由曲面的非线性鲁棒评价指标，以此定量指标为优化目标，通过差分演化算法^[10-11]实现自由曲面的鲁棒性设计。将 NURBS 控制点坐标作为形状控制变量，单元厚度作为材料分布变量，进行了自由曲面的形状优化以及形状、厚度联合优化设计。优化结果表明，较小的曲面形状变动可使结构力学性能明显改善，单元材料的分布往往形成一定的拓扑构型，其是曲面材料分布的关键位置，也是曲面力流传导的关键路径。

1 基于鲁棒设计的自由曲面优化

1.1 NURBS 曲面创建

NURBS^[2]是一种参数表达的自由曲面精确描述方法，能够快速、稳定地描述复杂的曲面形状，且生成的曲面连续、光滑。

采用齐次坐标系，则 NURBS 曲面定义为

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}^w \quad (1)$$

式中： $0 \leq u, v \leq 1$ ； p 、 q 代表 u 、 v 方向曲面次数； $N_{i,p}(u)$ 、 $N_{j,q}(v)$ 分别为 u 、 v 方向基函数； $\mathbf{P}_{i,j}^w = (w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j})$ 为 4 维齐次坐标，其中 $w_{i,j}$ 为权因子， $(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ 为 3D 控制点；控制点数目为 $(n+1) \times (m+1)$ ；曲面上任一点的位置 $\mathbf{S}(u, v) = (x, y, z)$ 可通过 $\mathbf{S}^w(u, v) = (wx, wy, wz, w)$ 前三个坐标分量除以第四个坐标分量获得。

u 向 p 次基函数 $N_{i,p}(u)$ 的递推定义如下：

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3)$$

同理定义 v 向 q 次基函数 $N_{j,q}(v)$ 。基函数为分段函数， u 、 v 参数的节点组成矢量 \mathbf{U} 、 \mathbf{V} ：

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad r = n + p + 1 \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, u_{q+1}, \dots, u_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\} \quad s = m + q + 1$$

本文利用 MATLAB 实现上述自由曲面的创建和显示，并取控制点坐标作为形状优化的

变量。

1.2 优化数学模型

通过改变自由曲面形状、厚度，得到非线性条件下结构鲁棒性指标的最小值，优化模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & I_R = f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & V(\mathbf{x}) \leq V_0 \\ & \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma^U \\ & S(\mathbf{x}) \leq S^U \end{aligned} \quad (5)$$

式中：优化变量 \mathbf{x} 包括控制点坐标、曲面单元厚度，满足 $x_i^L \leq x_i \leq x_i^U$ ， $i=1,2,\dots,n$ ； $V(\mathbf{x})$ 、 V_0 分别是曲面的体积、体积限值； $\sigma(\mathbf{x})$ 、 σ^U 分别是最大 Mises 应力、应力限值； $S(\mathbf{x})$ 、 S^U 分别是最大位移、位移限值。

I_R 为基于 H_∞ 控制理论^[12] 的结构鲁棒性指标。将结构视为一个输入输出系统，则结构鲁棒性可用来表达输出信号与输入信号是否相称，结构系统传递函数的 H_∞ 范数则具体反映了结构的健壮程度，即鲁棒性。

对结构系统的运动方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

式中： \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵， $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$ 分别表示节点位移向量和

节点荷载向量。令状态向量 $\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$ ，则系统的状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) \quad (7)$$

$$\text{其中：} \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

设荷载 $\mathbf{u}(t)$ 产生干扰 $\mathbf{w}(t)$ ，系统的位移输出变为 $\mathbf{y}(t) + \Delta\mathbf{y}(t)$ ，则结构系统传递关系如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{wy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{w\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

对线性系统，传递函数 \mathbf{G}_{wy} 与 $\mathbf{G}_{w\Delta y}$ 是等价的。因此结构的鲁棒性可以表示成：

$$I_R = \|\mathbf{G}_{w\Delta y}\|_\infty = \|\mathbf{G}_{wy}\|_\infty \quad (9)$$

非线性结构系统的传递函数矩阵与输入有关，引入 L2 性能准则，则鲁棒性可以用结构系统的 L2 诱导范数表示：

$$I_R = \|\mathbf{G}_{w\Delta y}\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{w}\|_2 \neq 0} \frac{\|\Delta\mathbf{y}(t)\|_2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2} \quad (10)$$

式中二范数的计算方法如下：

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \left(\int_0^\infty \|\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \mathbf{f}^T(t) \mathbf{f}(t) dt \right)^{1/2} \quad (11)$$

I_R 代表了系统对外界干扰的响应值， I_R 越小，表示结构的鲁棒性越好。在典型的荷载作用下，鲁棒性指标可由(10)式分子部分即位移范数表示。

1.3 差分演化算法 (DE 算法)

(5)式的优化模型求解采用 DE 算法，DE 是基于实数编码的随机搜索算法，具有算法简

单、寻优高效的特点。DE 种群规模为 NP ，变量维度为 D 。种群个体： $\mathbf{X}_{i,G} = \{x_{i,G}^1, \dots, x_{i,G}^D\} i=1, \dots, NP$ 。变量上下界限为： $\mathbf{X}_{\max} = \{x_{\max}^1, \dots, x_{\max}^D\}$ ， $\mathbf{X}_{\min} = \{x_{\min}^1, \dots, x_{\min}^D\}$ 。

种群初始化可按如下方法进行：

$$x_{i,0}^j = x_{\min}^j + \text{rand}(0,1) \times (x_{\max}^j - x_{\min}^j) \quad (12)$$

110 式中： $i=1, \dots, NP$ ； $j=1, \dots, D$ 。 $\text{rand}(0,1)$ 是 $[0,1]$ 上的随机数，DE 算法的实现需要三个步骤的操作：变异、交叉、选择，具体如下

1)变异操作

DE 算法的变异操作产生中间代，常用模式有数种，本文采用如下加速收敛的模式：

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{i,G} + F(\mathbf{X}_{\text{best},G} - \mathbf{X}_{i,G}) + F(\mathbf{X}_{r_1',G} - \mathbf{X}_{r_2',G}) \quad (13)$$

115 F 称为变异因子，通常是位于 $[0,2]$ 范围内的实数， $\mathbf{X}_{\text{best},G}$ 是 G 代最优个体， r_1', r_2' 是位于 $[1, NP]$ 内互不相同的随机整数。

2)交叉操作

为增加种群多样性，运用交叉策略完成中间代与旧个体之间代码互换，产生新个体，记新个体为

$$120 \quad \mathbf{U}_{i,G} = \{u_{i,G}^1, u_{i,G}^2, \dots, u_{i,G}^D\}$$

$$u_{i,G}^j = \begin{cases} v_{i,G}^j, & \text{rand}(0,1) \leq CR \text{ 或 } j = \text{randint}(1,D) \\ x_{i,G}^j, & \text{rand}(0,1) > CR \text{ 且 } j \neq \text{randint}(1,D) \end{cases} \quad (14)$$

CR 为交叉概率，位于 $[0,1]$ 之间， $\text{randint}(1,D)$ 是 $[1,D]$ 上产生的随机整数， $v_{i,G}^j$ 是 $\mathbf{V}_{i,G}$ 中的第 j 个变量。

3)选择操作

计算新旧个体函数值，优胜劣汰：

$$125 \quad \mathbf{X}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{U}_{i,G}, & f(\mathbf{U}_{i,G}) \leq f(\mathbf{X}_{i,G}) \\ \mathbf{X}_{i,G}, & f(\mathbf{U}_{i,G}) > f(\mathbf{X}_{i,G}) \end{cases} \quad (15)$$

采用惩罚函数的思想考虑(5)式的不等式约束，若不等式约束不满足，则函数值受到惩罚。

1.4 基于差分演化算法的优化模型求解流程

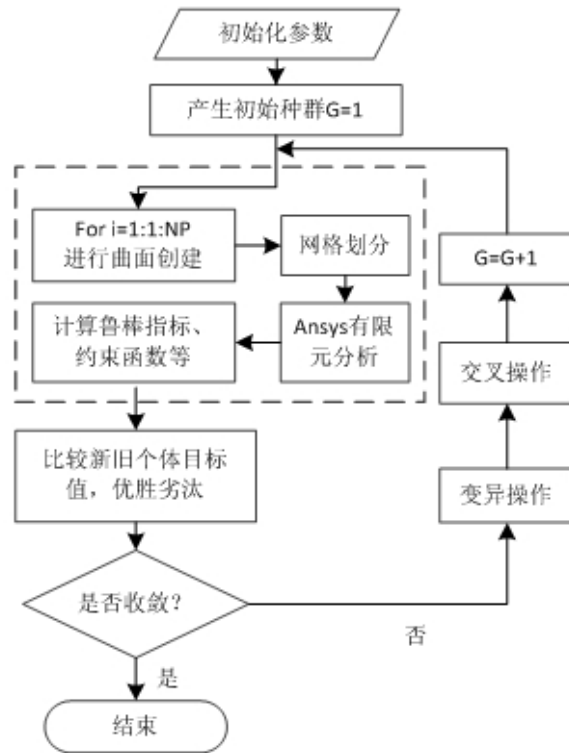


图 1 优化过程实现流程

Fig.1 Flow diagram of optimization process

基于通用软件 MATLAB 和 ANSYS，通过数据文件的交流完成联合调用，求解流程如图 1。

2 算例分析

2.1 均布荷载作用下的正方形平面球面壳优化

本例优化的初始曲面为四点支承球面壳（双曲扁壳），通过在初始球面上增加一个小范围波动的自由曲面，分析曲面形状对结构力学性能的影响。

初始球面半径 3 m，长宽各 2 m，矢高 35.42 cm，球面厚度 5 mm，均布荷载 9 kN/m^2 ，如图 2(a)；材料弹性模量 $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，密度 7850 kg/m^3 ，泊松比 0.3。初始球面的鲁棒指标为 0.0831，应变能 24.4 J，最大竖向位移 6.78 mm，最大 Mises 应力 140 MPa。（本文图片省略的标注尺寸均为国际单位 m）

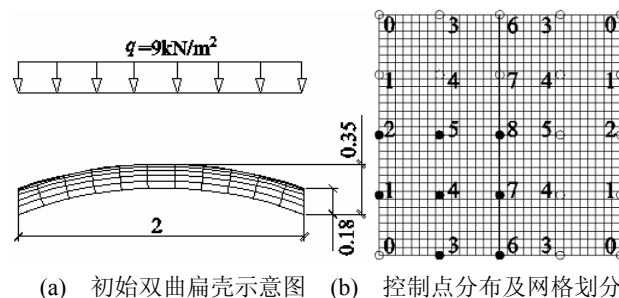


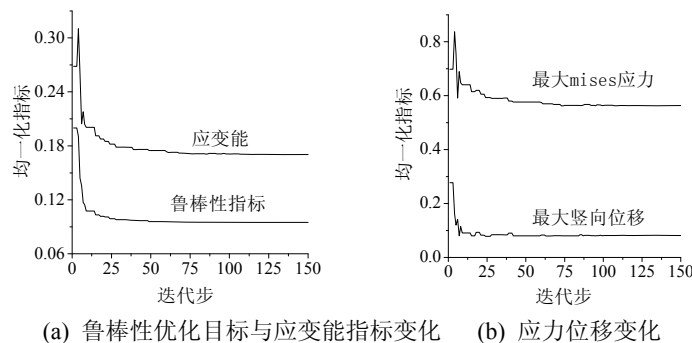
图 2 初始模型参数

Fig.2 The initial model parameters

在初始球面上附加微小的自由曲面调节球面的形状变化，NURBS 控制点数量为 5×5 ，

由对称性, 取 1/4 结构的控制点竖坐标作为变量, 如图 2(b)中的 1-8 号黑色实点, 控制点竖向变化幅度为-0.1—+0.1m, 由于 0 号控制点位置保持嵌固, 故其竖坐标始终为 0, 其余控制点对称获得, 预设所有权因子 $w_{ij}=1$; 为保证有限元计算的效果, 网格划分密度必须大于控制点密度, 本例采用 30×30 的有限元网格, 其水平投影在优化中保持不变。

DE 算法种群为 50, 迭代 150 代, $F=CR=0.6$ 。利用初始球面的数值进行优化指标的均一化, 优化过程中鲁棒性目标、应变能、应力、位移变化如 3。



(a) 鲁棒性优化目标与应变能指标变化 (b) 应力位移变化

图 3 优化过程中指标变化

Fig.3 Index variation history in the process of optimization

相比初始球面, 最优曲面矢高提高了 8.62 cm, 达到 44.04 cm, 鲁棒性指标下降 90.5%, 应变能下降 83.0%, 最大 Mises 应力下降 43.7%, 最大竖向位移下降 91.9%, 表明曲面较小的形状变动即显著改善结构的力学性能。

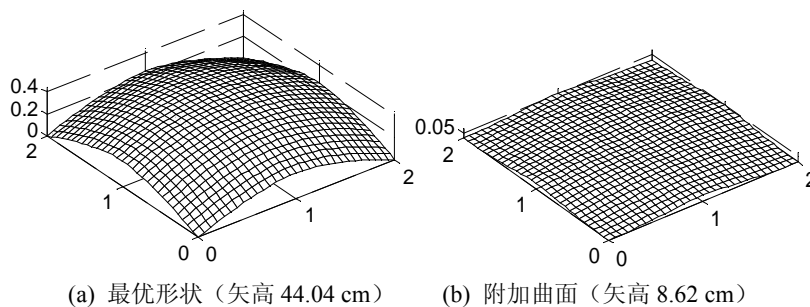


图 4 优化曲面形状

Fig.4 Optimal shape about surface

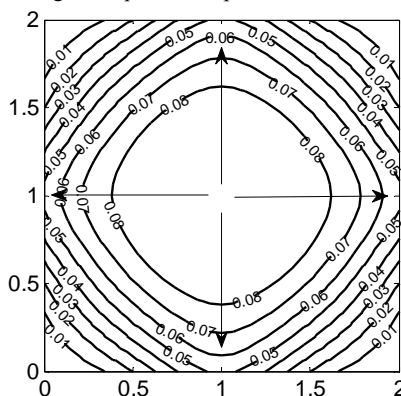


图 5 附加曲面等高线图

Fig.5 Contour map of additional surface

为观察附加曲面的形状, 利用 MATLAB 生成附加曲面的等高线图, 如图 5。附加曲面的特点为: 曲面形成四个如箭头所示的山脊形状, 表明曲面通过起拱的方式抵抗荷载, 曲面的中心较为平坦, 中心矢高 8.62 cm, 周边的等高线分布较为均匀。

2.2 自由曲面形状和厚度的联合优化

对于自由曲面结构,除形状外,曲面的厚度分布应与受力路径相一致,合理的材料布置可以进一步提高曲面的受力能力。本算例通过自由曲面结构形状和厚度的联合优化,考虑两种变量同时存在下的最优结构求解问题。

本算例采用的曲面控制点布置、尺寸和材料参数等同算例 2.1,有限元网格采用 20×20 , 本例中初始结构是一矢高为零的平面;控制点竖坐标在 0-0.5 m 之间变化,作用 10 kN 集中荷载于曲面中心。

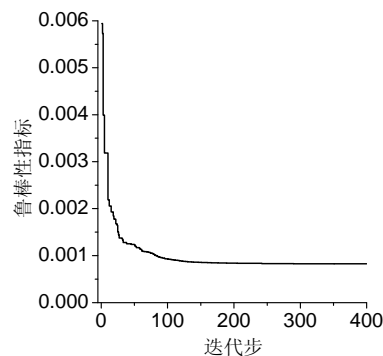


图 6 鲁棒性指标变化

Fig.6 Iteration history of robustness optimization index

由对称性,取 1/4 结构的有限元单元厚度作为优化变量,数目为 100 个,其余部分单元的厚度采用对称性获得,单元厚度变化范围限制在 2.0 mm-8.0 mm;式(5)中 $V_0 = 2 \times 2 \times 0.005 = 0.02 \text{ m}^3$, $F = CR = 0.5$, $NP = 400$,迭代 400 次。曲面的鲁棒性指标变化和优化结果如图 6 所示,最优解的鲁棒性指标为 0.000824。

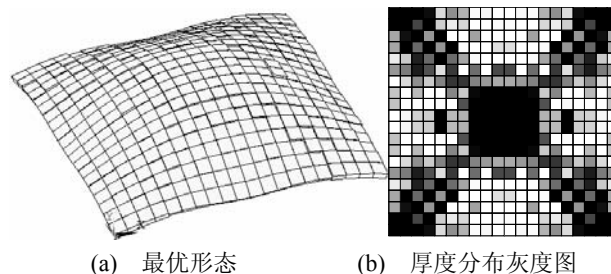


图 7 最优结果

Fig.7 Optimal results

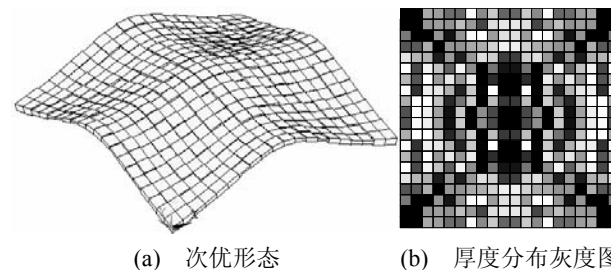


图 8 次优结果

Fig.8 Second-best results

观察优化结果的形状(图 7),在曲面的对角线方向形成两道交叉的拱形突起,有效地提高了结构鲁棒性和刚度。对单元厚度分布,若单元的厚度越大,可认为此部分材料越重要,对实际结构的受力贡献越大,将单元的厚度分布用灰度图进行显示(颜色越深,单元厚度越大),可以明显的看出主要的材料分布位于对角线范围内,即集中荷载传递到支座位置的最

短路径。增强对角线范围内的材料分布可提高材料的利用效率,并进一步改善曲面的力学性能。

优化到 200 步左右时,产生了一个较好的局部最优解,其鲁棒性指标为 0.000845,形状明显不同于最优解,但厚度分布与最优解较接近,如图 8。

3 结构鲁棒性与应变能指标对比

鲁棒性与应变能均能反映结构的综合力学性能。应变能可以表征结构的刚度,应变能越小,结构刚度越大;鲁棒性反映结构失效后果和抵抗破坏的能力,指标越小,鲁棒性越好。

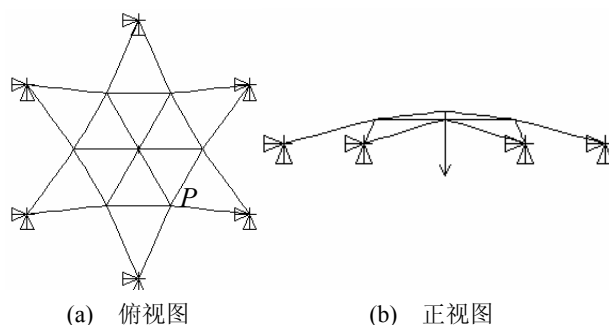


图 9 六角星形穹顶示意图

Fig.9 Sketch map of hexagonal star dome

图 9 所示的六角星形穹顶为结构非线性屈曲分析的经典案例^[13],以此为对象对比非线性条件下鲁棒性指标与应变能指标的异同。 P 逐渐由 0 增大到 20 kN,则结构的鲁棒性与应变能指标变化如图 10。

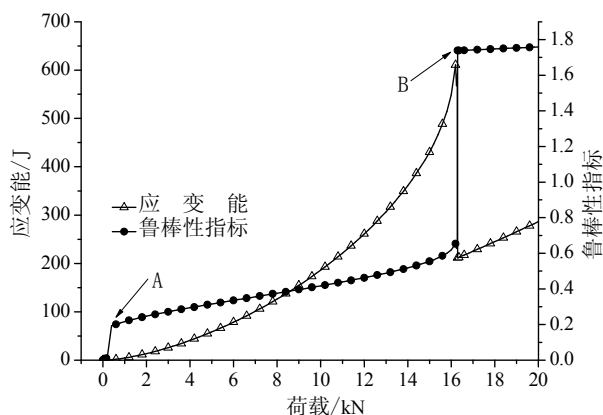


图 10 鲁棒性和应变能指标随荷载变化曲线

Fig.10 Variation curve of robustness and strain energy index with load

对星形穹顶,在集中力作用下,先后发生两次屈曲过程,分别是内圈杆件和外圈杆件的跳跃屈曲,对应图 10 中的 A、B 两点。由于第一次屈曲过程中刚度较小,应变能指标变化不明显,而鲁棒性指标发生了明显的跳跃;第二次屈曲过程中,鲁棒性指标再次发生跳跃,与第一次原因相同,都是由于结构变形的突然增大造成的,而应变能则显著变小,原因在于结构的几何负刚度得到释放,跳跃之后刚度得到提高,故应变能变小。由此可见,虽然鲁棒性指标与应变能指标均是反映结构力学性能的综合指标,但同一结构力学行为却反映出不同的物理特征。鲁棒性指标较好地表征结构整体变形过程,而应变能则可表征结构的整体刚度。当然,鲁棒性指标与应变能指标也有较一致的情况,如本文中例 1 计算得到的图 3。

4 结论

本文建立了自由曲面结构的鲁棒性评价指标,通过优化方法实现自由曲面的鲁棒性设计,对自由曲面形状和厚度的优化,能够大幅提高其受力性能。得到的结论有:

(1) 自由曲面的形状决定其力学性能,通过小范围的修改曲面的形状,即可大幅提高结构的鲁棒性和刚度,这对实际工程设计意义重大,通过小幅修改曲面形状,能够在不影响曲面形态的条件下大幅提高曲面安全性能,获得良好的经济效益。

(2) DE 算法是一种高效的搜索式算法,能够求解不同类别的变量同时存在时的优化问题。本文利用 DE 算法实现了自由曲面形状和厚度变量的联合优化,同时考虑了二者的相互影响,得到了最优的曲面形态与材料分布。根据材料厚度分布灰度图,材料分布较为集中的区域应予以加强。材料往往沿着结构的力学传递路径集中,形成一定的拓扑构型,这不仅对自由曲面的材料分布具有指导作用,且对自由曲面网格结构的杆件布置具有借鉴意义。

(3) 本文的 H_{∞} 鲁棒性指标是一种结构评价的综合指标,反映了结构在外界荷载作用下的抗干扰、抗破坏能力,而应变能通常表征结构整体刚度。本文通过算例 1 表明,结构的鲁棒性与应变能体现出一定的关联性,两者具有一致性,同时通过算例 3 表明,相比应变能,鲁棒性指标能更加明确地表征结构的屈曲过程,体现结构的破坏后果。在优化算例分析中,提高结构鲁棒性的同时可以大幅降低应变能,结构的刚度提高致使应力、位移显著下降。

[参考文献] (References)

- [1] 崔昌禹, 严慧. 自由曲面结构形态创构方法高度调整法的建立与其在工程设计中的应用[J]. 土木工程学报, 2006, 39(12):1-6.
- [2] Piegel L, Tiller W. 非均匀有理 B 样条 (第二版) [M]. 赵罡, 穆国旺, 王拉柱, 译. 北京:清华大学出版社, 2010:86-101.
- [3] 李欣, 武岳, 崔昌禹. 自由曲面结构形态创建的 NURBS-GM 方法[J]. 土木工程学报, 2011, 44(10):60-66.
- [4] Lee S J, Hinton E. Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions[J]. Computers & Structures, 2000, 78(1):473-486.
- [5] Starossek U, Haberland M. Disproportionate collapse: terminology and procedures[J]. Journal of Performance of Constructed Facilities, 2010, 24(6):519-528.
- [6] Lee M C.W, Kelly D W, Degenhardt R. A study on the robustness of two stiffened composite fuselage panels[J]. Composite Structures, 2010, 92(2):223-232.
- [7] Kanno Y, Ben-Haim Y. Redundancy and Robustness, or When Is Redundancy Redundant?[J]. Journal of Structural Engineering, 2011, 137(9):935-945.
- [8] England J, Agarwal J, Blockley D. The vulnerability of structures to unforeseen events[J]. Computers and Structures, 2008, 86(10): 1042-1051.
- [9] 张成, 吴慧, 高博青, 等. 基于 H_{∞} 理论的结构鲁棒性分析[J]. 建筑结构学报, 2012, 33(5):87-92.
- [10] Storn R, Price K. Differential evolution-a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. Journal of global optimization, 1997, 11(4):341-359.
- [11] 贺毅朝, 王熙照. 基于改进 DE 算法的难约束优化问题的求解[J]. 计算机工程, 2008, 34(13):193-194.
- [12] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008:61-63.
- [13] 陈昕, 沈世钊. 网壳结构的几何非线性分析[J]. 土木工程学报, 1990, 23(3): 47-57.