根轨迹法新发展和一个重要函数的根轨迹

马召坤[1]，马兰德[2]
（1．山东电大兖州学院，山东 兖州 272100；
2．曲阜师范大学数学学院，山东 曲阜 273100）

摘要：本文对《自动控制理论》中的根轨迹法，又进一步推广到根轨迹方程分式里的零极点含非简单零极点的情况；再将它们推广到除了含分式以外，还含无零极点因式更一般情况。在假设 Riemann Hypothesis 成立的前提下,给出并严格证明了 Riemann Zeta 辅助函数的根轨迹。

关键词：自动控制；根轨迹；零点；极点；根轨迹方程
中图分类号：0231.1

The Root Locus Method Developed Newly and The Root Locus of A Important Function

Ma ZhaoKun[1], Ma Lande[2]
(1. ShanDong TV University, YanZhou College, ShanDong YanZhou 272100;
2. Mathetic College, Qufu Normal University, ShanDong QuFu 273100)

Abstract: In this paper the root locus method in automatic control theory, They have been also expanded to the root locus equations which have non-simple zeros and poles. More generally they have been expanded to the root locus equations which not only include rational fraction but also include the factor which there exist no any zeros and poles.Assuming that Riemann Hypothesis is true, the root locus of Riemann zeta function have been sketched, and their reasonable have been proved.

Keywords: Automatic control; the root locus; zero; pole; the root locus equation

0 引言

根轨迹法是《自动控制理论》[1][2]中的三大工具之一。它把部分解析函数在复平面上函数值分布的规律给了出来，同时也把部分解析函数导函数零极点的分布给了出来，所以，这样的方法一定是可以解决纯数学问题[3][4][5]的新的数学工具。Riemann Zeta 辅助函数$\xi(s)$是一个非常重要的函数，所以，给出其根轨迹对研究 Riemann Hypothesis 非常有帮助。

1 有无穷个零极点且是非简单零点的根轨迹、根轨迹簇及其性质等问题

对于特殊的根轨迹方程：$K\frac{1}{\sqrt[n]{s-a}}=a+bi=\cos\theta+i\sin\theta$，可以转化为：$K\frac{1}{s-a}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$，方程右边的函数周期不再是$2\pi$，而变成了$\frac{2\pi}{n}$。其相角条件方程为：$--\frac{1}{n}\angle(s-a)=\cos\theta+i\sin\theta$。始于该点的根轨迹就是一个从 0 度到$\frac{2\pi}{n}$度的根轨迹簇了。大于$\frac{2\pi}{n}$的度数的根轨迹与这一度数范围内的根轨迹重叠。0 度的根轨迹和

作者简介：马召坤，（1964-），男，副教授，自动控制，函数论，数论。 E-mail: dzy200408@126.com

$\frac{2\pi}{n}$ 度的根轨迹重合。

下面的根轨迹方程，其零极点是共轭的，含非简单的零极点。

$$K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}}{\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}}=a+bi \tag{1.1}$$

根轨迹方程（1.1）的指数 α_i 和 β_j ,它们都为正数，当其大于 1 时,即 $\alpha_i=\alpha_{i1}+\alpha_{i2}$, $\beta_j=\beta_{j1}+\beta_{j2}$, α_{i1} 和 β_{j1} 是正整数（其整数部分）。α_{i2} 和 β_{j2} 是小于 1 的正实数（其小数部分）。α_{i2} 和 β_{j2} 确定了该点的根轨迹簇中根轨迹的最大度数。所以，其根轨迹簇中的根轨迹的最大度数是 $2\alpha_{i2}\pi$ 和 $2\beta_{j2}\pi$ 。与角的度数一样，根轨迹的度数具有周期性，非简单零点的根轨迹的度数的周期是 $\frac{2\pi}{n}$ ，简单零点的是 2π 。非简单零点的整数部分与简单零点是重零点时一样，它也是零点的重数的一个数量，它代表了非简单零点的重数。即，整数部分 α_{i1} 和 β_{j1} 确定了每一个非简单零极点接收或发出 $\alpha_{i1}+1$ 和 $\beta_{j1}+1$ 个根轨迹簇。

定理 1.1：根轨迹方程（1.1）是 $\alpha=arctg(\frac{b}{a})$ ， α 度，充要性地确定其根轨迹的相角条件方程，以及增益计算公式分别为：

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j\angle(s-p_j)=2q\pi+\alpha \qquad K=\frac{\prod_{j=1}^{+\infty}\left|s-p_j\right|^{\beta_j}}{\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|^{\alpha_i}}$$

这里不再对它们给出证明了。

定理 1.2：任意度数的根轨迹都起于根轨迹方程的极点或无穷远，终于到根轨迹方程的零点或无穷远。也就是，根轨迹簇都起于根轨迹方程的极点或无穷远，终于到根轨迹方程的零点或无穷远。当 m 是有限值时，根轨迹簇都起于根轨迹方程的极点，终于到根轨迹方程的有限零点，并有无穷多个根轨迹簇终于到无穷远。

证明略。

定理 1.3：实轴上最大的零极点的右侧是根轨迹方程(1.1)的 0 度的根轨迹。在其他区间上的根轨迹的度数为：位于其右边的实数零点的指数 α_i 之和乘以 π 减去位于其右边的实数极点的指数 β_j 之和乘以 π 。

证明：首先需要明确的是，复数的零极点对实轴上的根轨迹的度数没有影响，这个问题前面已证明了，所以，这里就不再给出了。

实轴上的点与位于该点左边的实数零极点相位都为 0，所以，实轴上最大的零极点的右侧是根轨迹方程(1.1)的 0 度的根轨迹。

在计算实轴上的某点所在的根轨迹的度数时，在该点左边的实数零极点，它们不需要考虑。该点与位于该点右边的实数零极点相位分别为 $\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i\pi$, $\sum_{j=1}^{n_1}\beta_j\pi$ ，该区间的根轨迹的度

数为：$(\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i-\sum_{j=1}^{n_1}\beta_j)\pi$。证毕。

定理 1.4：根轨迹方程（1.1）α 度的根轨迹分支的数目不小于根轨迹方程（1.1）的非简单极点其指数的小数部分满足 $\beta_{j2}\ge\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 的极点的数目。根轨迹簇的数目不小于根轨迹方程（1.1）的非简单极点其指数的小数部分满足 $\beta_{j2}\ge\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 的极点的数目。

证明：根轨迹方程（1.1）的根轨迹都起于极点或无穷远。对于指数的小数部分 $\beta_{j2}\ge\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 成立的非简单极点，其根轨迹簇里才含有 α 度的根轨迹分支。所以，根轨迹方程（5.1）α 度的根轨迹分支的数目不小于根轨迹方程（1.1）中，指数的小数部分满足 $\beta_{j2}\ge\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 非简单极点的数目，在很多情况下，它们是相等的关系，需要对根轨迹方程（1.1）起于无穷远的数目具体地给予证明. 根轨迹簇，与任意度数 α 度的根轨迹一一对应着，所以，根轨迹簇的数目不小于根轨迹方程（1.1）中，指数的小数部分满足 $\beta_{j2}\ge\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 的非简单极点的数目。更详细的证明前面都给出了，这里就不再给出了。　　证　　毕。

定理 1.5：根轨迹方程（1.1）的任意度数 α 度的根轨迹在整个复平面上都是连续的。其任意度数 α 度的根轨迹与 $-\alpha$ 度的根轨迹关于实轴对称。如果存在 180 度的根轨迹，只有根轨迹方程（1.1）的 180 度和 0 度的根轨迹相对于实轴对称，其他度数的都不能关于实轴对称分布。

证明略。

定理 1.6：根轨迹方程（1.1）的分离点，必满足方程：$\sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{\beta_j}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\alpha_i}{s-z_i}$　　（1.2）

证明：根轨迹方程（1.1）等价于特征方程，

$(a+bi)\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}-K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}=0$，即：

$(a+bi)\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}=K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}$，对它微分，

$(a+bi)(\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j})'=K(\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i})'$，它是特征方程微分后的形式。用它除以上面的特征方程。得：$\sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{\beta_j}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\alpha_i}{s-z_i}$。分离点是根轨迹的交点，它既是微分后的特征方程的根，它也是这个分式方程的根。　　证　毕。

定理 1.7：　任意度数 α 度的根轨迹都有相同的起始点终止点。但是，在起始点终止点之外的不同度数的根轨迹之间不能有任何交点。

证明略。

定理 1.8：根轨迹方程（1.1），其同度数的根轨迹可以有交点。但是，在 Eq（1.2）中等式两端的两个分式的和都取得有限值的点上，根轨迹都不能有重叠的部分。

证明略。

定理 1.9：根轨迹都具有完整性。即每条根轨迹，都是由起点起（极点，或无穷远点），连续地终于到自己的终点（零点，或无穷远点），不能有头无尾，也不能有尾无头。

证明略。

定理 1.10：任意一个根轨迹方程的根轨迹都布满整个的复平面。即，复平面上不能出现不在根轨迹方程的根轨迹上的点，而出现“真空”地带。复平面上的任意一点都一定在根轨迹方程的某个度数的根轨迹上。反过来，根轨迹方程的某个度数的，某个增益值的一对条件，在复平面上一定可以找到与它们相对应的点。每一个根轨迹方程都与一个复平面一一对应。

证明略。

定理 1.11：根轨迹方程（1.1）的同一条根轨迹，当它在某一区域里没有根轨迹方程的零点，则这条根轨迹在此区域内自身与自身不能相交。

证明略。

该定理的一个推论，就是：

推论：在复平面上，包括实轴上的根轨迹，当它在某一区域里没有根轨迹方程的零点，则在此区域内任何一条根轨迹都不能构成封闭的曲线。

定理 1.12：根轨迹方程（1.1）的没有零点和实数极点，所有的极点都共轭位于过实轴上的点 B，且垂直于实轴的直线 $\mathrm{Re}(s)=B$ 上，点 B 不是根轨迹方程的极点，则，直线 $\mathrm{Re}(s)=B$ 上最靠近实轴的一对共轭的极点之间是 0 度的根轨迹，该线上的其它区间的根轨迹的度数为：$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$，$n$ 为这条线上这个区间至实轴之间的极点的个数。（含该区间下面的这个端点的极点。）该线上两个相邻的极点之间必至少有一个分离点，此线段是这两个相邻的极点的“公共的根轨迹”。其任意的 $\alpha-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 度的根轨迹与 $-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi-\alpha$ 度的根轨迹关于此线对称。分布在该线以外的 $-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 度的同度数的根轨迹关于本线对称。

证明：首先证明，位于直线 $\mathrm{Re}(s)=B$ 上的最靠近实轴的复数极点之间的线段，是 0 度的根轨迹。

选择点 A 是该条直线上的最靠近实轴的复数的极点之间的线段上的任意一点。点 A 与位于直线 $\mathrm{Re}(s)=B$ 上的复数的极点之间的相角的和一定是零，这是因为实系数的根轨迹方程的复数极点关于实轴共轭对称，所以，点 A 与每一对该直线上的共轭复数极点之间的相角的和一定是：$\beta_j(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=0$。位于该条直线上的复数的极点，对点 A 是在多少度的根轨迹上没有影响，不需要考虑。实轴上没有根轨迹方程的零极点，所以，整个实轴就是 0 度的根轨迹。这样就证明了这个结论。

再证明，位于该条直线上的其它区间的根轨迹的度数为：$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$。

选择点 A 是该条直线在上半复平面的该区间上的任意一点。点 A 与位于该条直线上且在点 A 以上的极点之间的相角为 $-\frac{\pi}{2}\beta_j$，点 A 与那些极点的共轭点之间的相角为 $\frac{\pi}{2}\beta_j$. 所

以,点 A 与这些极点之间的相角的和一定是零，它们对 A 点在多少度的根轨迹上没有影响，不需要考虑。

点 A 与在点 A 与实轴之间的，一对共轭极点之间的相角的和是：$\beta_j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\beta_j\pi$ 。

所以，该线上的其它区间的根轨迹的度数为：$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$，$n$ 为这条线上这个区间至实轴之间的极点的个数。（含该区间下面的这个端点的极点。）

复平面上的任意两个关于该条直线对称的点 s_1、s_2，设点 s_1 在该条直线的右侧，则点 s_2 就在该条直线的左侧，设点 E_j 是该条直线上的复数的极点，点 s_1 与点 E_j、点 $\overline{E}_j$ 的相角分别为 $\beta_j\gamma_j$、$\beta_j\gamma_j^{'}$，则点 s_2 与点 E_j、点 $\overline{E}_j$ 的相角分别为 $\beta_j(\pi-\gamma_j)$、$\beta_j(\pi-\gamma_j^{'})$。

综上所述，点 s_1 与根轨迹方程的极点的相角的和为：$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$

点 s_2 与根轨迹方程的极点的相角的和为：

$$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\pi-\gamma_j)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\pi-\gamma_j^{'})=-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=11}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$$

$$=-2\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$$

若令 $-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}=\alpha-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 。

则，$-2\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}=-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi-\alpha$，因此，命题里的这个结论得到了证明，特别地当 $\alpha=0$ 时，分布在该线以外的 $-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 度同度数的根轨迹关于本线对称。

证 毕。

2 根轨迹方程里含没有零极点的解析式的根轨迹,根轨迹簇及其性质等问题

这里再对下面的根轨迹方程的相关问题给出结论和证明。

$$KG(s)\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}}{\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}}=a+bi \qquad (2.1)$$

根轨迹方程（2.1）的指数 α_i 和 β_j 的情况完全同于前一节，这里不再给出。$G(s)$ 因式没有零极点。

定理 2.1：根轨迹方程（2.1）是 $\alpha=arctg(\frac{b}{a})$，$\alpha$ 度，充要性地确定其根轨迹的相角条件方程，以及增益计算公式分别为：

$$\angle G(s)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\angle(s-z_i))-\sum_{j=1}^{+\infty}(\beta_j\angle(s-p_j))=2q\pi+\alpha \qquad K=\frac{\prod_{j=1}^{+\infty}\left|s-p_j\right|^{\beta_j}}{\left|G(s)\right|\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|^{\alpha_i}}$$

这里不再对它们给出证明了。

定理 2.2: 任意度数的根轨迹都起于根轨迹方程的极点或无穷远，终于到根轨迹方程的零点或无穷远。也就是，根轨迹簇都起于根轨迹方程的极点或无穷远，终于到根轨迹方程的零点或无穷远。当 m 是有限值时，根轨迹簇都起于根轨迹方程的极点，终于到根轨迹方程的有限零点，并可能有无穷多个根轨迹簇可能终于到无穷远。

证明：尽管在根轨迹方程里含没有零极点的复变函数的因式，本定理的证明基本上同于前面几个定理，相同的部分这里不再给出。只给出有差别的地方。

当 m 是有限值时，$K=\frac{\prod_{j=1}^{+\infty}\left|s-p_j\right|^{\beta_j}}{\left|G(s)\right|\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|^{\alpha_i}}$，所以，若 $K=\lim_{\|s\|\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{+\infty}\left|s-p_j\right|^{\beta_j}}{\left|G(s)\right|\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|^{\alpha_j}}=\lim_{\|s\|\to\infty}\left|s\right|^{+\infty-m}\to+\infty$，则无穷远一定是根轨迹的终点，有无穷多个根轨迹簇终于到无穷远。 也存在 $K=\lim_{\|s\|\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{+\infty}\left|s-p_j\right|^{\beta_j}}{\left|G(s)\right|\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|^{\alpha_i}}\to A$。$A$ 是有限值。这样的情况时，无穷远点是根轨迹方程(6.1)的根轨迹上增益值有限的普通点。所以，无穷远点是根轨迹方程(6.1)的根轨迹上的什么点，需要具体地计算得到。

当 m,n 都是正无穷大时，无穷远点是不是根轨迹簇的终点，必须在对具体的根轨迹方程研究证明之后才能得到正确的结论。 证 毕。

定理 2.3: 当 $G(s)$ 在实轴上取得实数值时,实轴上最大的零极点的右侧是根轨迹方程(2.1)的 0 度的根轨迹。在其他区间上的根轨迹的度数为:位于其右边的实数零点的指数 α_i 之和乘以 π 减去位于其右边的实数极点的指数 β_j 之和乘以 π。当 $G(s)$ 在实轴上取得复数值时, 每个点都在不同度数的根轨迹上, 实轴上某个区间上一般不再是同度数的根轨迹了。

当 $G(s)$ 在实轴上取得实数值时,它的相角对实轴上的区间的根轨迹的度数没有任何影响，所以，对该命题中的结论的证明，与前面的定理的证明完全一样。也没有影响。这里不再给出它们的证明了。当 $G(s)$ 在实轴上取得复数值时,在本文里不需要，这里也不详细给出了。

定理 2.4: 根轨迹方程（2.1）α 度的根轨迹分支的数目不小于根轨迹方程（2.1）的极点的指数的小数部分满族 $\beta_{j2}\geq\frac{\alpha}{2\pi}$ 的极点的数目。根轨迹簇的数目不小于根轨迹方程（2.1）的这样的极点的数目。

这里不再给出证明了。

定理 2.5： 当$G(s)$函数是关于实轴共轭对称时，根轨迹方程（2.1）的任意度数α度的根轨迹在整个复平面上都是连续的。其任意度数α度的根轨迹与$-\alpha$度的根轨迹关于实轴对称。如果存在对称于实轴的相同度数的根轨迹，只有根轨迹方程（2.1）的 180 度和 0 度的根轨迹，其他度数的都不能关于实轴对称分布。当$G(s)$函数不能关于实轴共轭对称时，根轨迹的连续性是成立的，180 度和 0 度的根轨迹的对称性一般不能成立了。

其证明不再给出。

定理 2.6： 根轨迹方程（2.1）的分离点，必满足方程：

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\beta_j}{s-p_j}=\frac{G^{'}(s)}{G(s)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{s-z_i} \quad (2.2)$$

证明：根轨迹方程（2.1）可以化为特征方程，

$(a+bi)\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}-KG(s)\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}=0$，即：

$(a+bi)\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j}=KG(s)\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}$，对它微分，

$(a+bi)(\prod_{j=1}^{+\infty}(s-p_j)^{\beta_j})^{'}=KG(s)(\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i})^{'}+KG^{'}(s)\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)^{\alpha_i}$，它是特征方程的微分后的形式。用它除以上面的特征方程。得：$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\beta_j}{s-p_j}=\frac{G^{'}(s)}{G(s)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{s-z_i}$。分离点是根轨迹的交点，是微分后的特征方程的根，所以，它也是这个分式方程的根。　　证毕。

定理 2.7： 任意度数α度的根轨迹都有相同的起始点终止点。但是，在起始点终止点之外的不同度数的根轨迹之间它们不能有任何交点。

证明略。

定理 2.8： 根轨迹方程（2.1），其同度数的根轨迹可以有交点。但是，在 Eq（2.2）中等式两端的两个分式的无穷和都取得有限值的点上，根轨迹都不能有重叠的部分。

函数$G(s)$没有极点，则其导函数$G^{'}(s)$在整个复平面上也没有极点。由求导函数的运算法则就可以证明这个结论，这里不再给出。Eq（2.2）尽管含没有极点的因式$\frac{G^{'}(s)}{G(s)}$，但是在有限区域内它仍然可以近似为一个向简单零极点的分式一样。完全同前面的定理证明该命题。

定理 2.9： 根轨迹都具有完整性。即每条根轨迹，都是由起点起（极点，或无穷远点），连续地终于到自己的终点（零点，或无穷远点），不能有头无尾，也不能有尾无头。

证明略。

定理 2.10： 任何一个根轨迹方程的根轨迹都布满整个的复平面。即，复平面上不能出现不在根轨迹方程的根轨迹上的点，而出现“真空”地带。复平面上的任意一点都在根轨迹方程的某个度数的根轨迹的上。反过来，根轨迹方程的某个度数的，某个增益值的一对条件，在复平面上一定可以找到与它们相对应的点。每一个根轨迹方程都与一个复平面相对应。

证明略。

定理 2.11：根轨迹方程（2.1）的同一条根轨迹，当它在某一段的区域里没有根轨迹方程的零点，则这条根轨迹在此区域内自身与自身不能相交。

证明。

该定理的一个推论，就是：

推论：在复平面上，包括实轴上的根轨迹，当它在某一区域里没有根轨迹方程的零点，则在此区域内任何一条根轨迹都不能构成封闭的曲线。

定理 2.12：根轨迹方程（2.1）没有零点河实极点，其复数极点，它们全部都位于过实轴上的点B，且垂直于实轴的直线$\mathrm{Re}(s)=B$上，点B不是根轨迹方程的极点，$G(s)$在实轴上取得实数值，$G(s)=G(2B-s)$，且是共轭函数。则直线$\mathrm{Re}(s)=B$上最靠近实轴的一对共轭的极点之间是 0 度的根轨迹，该线上的其它区间的根轨迹的度数为：$\angle G(B+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$，$n$为这条线上这个区间至实轴之间的极点的个数。（含该区间下面的这个端点的极点。）该线上两个相邻的极点之间必至少有一个分离点，此线段是这两个相邻的极点的“公共的根轨迹”。其任意的$\alpha+\angle G(s)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$度的根轨迹与$\angle G(s)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi-\alpha$度的根轨迹关于此线对称。分布在该线以外的$\angle G(B+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$度的同度数的根轨迹关于本线对称。

证明: 本命题的证明里，除了多出一个因式外，很多内容的相应部分在证明上完全同于前面的定理，这里对相同部分不再给出。

复平面上的任意两个关于该条直线对称的点s_1、s_2，设点s_1在该条直线的右侧，则点s_2就在该条直线的左侧，设点E_j是该条直线上的复数的极点，点s_1与点E_j、点$\overline{E}_j$的相角分别为$\beta_j\gamma_j$、$\beta_j\gamma_j^{'}$，则点s_2与点E_j、点$\overline{E}_j$的相角分别为$\beta_j(\pi-\gamma_j)$、$\beta_j(\pi-\gamma_j^{'})$。综上所述，点$s_1$与根轨迹方程的极点的相角的和为：$\angle G(s_1)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$。点$s_2$与根轨迹方程的极点的相角的和为：

$$\angle G(s_2)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\pi-\gamma_j)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\pi-\gamma_j^{'})=\angle G(s_2)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=11}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$$

$$=\angle G(s_2)-2\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}$$

若令$\angle G(s_1)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}=\alpha-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\angle G(s_1)$

则，$\angle G(s_2)-2\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\gamma_j^{'}=\angle G(s_1)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi-\alpha$，因此，命题里的这个结论得到了证明，特别地当$\alpha=0$时，分布在该线以外的

$\angle G(B+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 度的同度数的根轨迹关于本线对称。

下面仅需要证明始于该线上两个相邻极点s_{t1}，s_{t2}间的“公共的根轨迹”和分离点都一定在此线上。

假设“公共的根轨迹”不在此线上，根据命题里的条件，由于$G(s)=G(2B-s)$的成立，所以，由上面的证明，在此线的另一侧的对称的位置上，一定存在着对称的曲线，这条对称的曲线，也一定是始于两个极点s_{t1}，s_{t2}的具有相同度数的根轨迹，也就是它们是始于两个极点s_{t1}，s_{t2}的相交在一起的“公共的根轨迹”，并有分离点.这样就有两条“公共的根轨迹”构成了一个封闭的区域，在这个封闭的区域里没有零点，所以，始于两个相邻极点的其他无穷多个度数的根轨迹，被封闭在这个区域内，而不能终于到自己的终点。这就产生了矛盾，因此，这种情况不能出现，在本命题的条件下， “公共的根轨迹”必位于该条线上，当然，分离点也一定分布在此线上。

所以,由上面的结论,再根据前面的式子,分布在该线上的根轨迹一定是度数为$\angle G(B+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 的根轨迹.分布在该线以外的关于本线对称的也是$\angle G(B+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$度的根轨迹。 证 毕。

本文里是否定 Riemann Hypothesis,因此,假定它的所有的非平凡零点都位于临界线上.即 Riemann Hypothesis 成立。根据这个假设，得到下面的结果。

3 $\xi(s)$函数的根轨迹

引理 **3.1**：$\xi(s)$函数的所有非平凡零点构成的因式是：$\prod_{j=1}^{+\infty}(s-s_j)^{\beta_j}$。$\xi(s)=G_\xi(s)\prod_{j=1}^{+\infty}(s-s_j)^{\beta_j}$，$G_\xi(s)$因式不含零极点.$\xi(s)$函数的根轨迹方程：$k\frac{1}{\xi(s)}=a+bi$ （7.1），其根轨迹簇有如下特征：

①其根轨迹簇都始于$\xi(s)$函数的全部分布在临界线上的非平凡零点，终于到复平面上的除了$s=0.5\pm\infty i$两个无穷远以外的所有方向上的无穷远。

②根轨迹方程的分离点，即$\xi^{'}(s)$函数的零点都分布在临界线上，临界带之外的根轨迹，都相互“平行”地终于到无穷远。在非平凡零点变成非简单零点和因式$G_\xi(s)$在临界线上某一区间上的相角不是0 或 180 度之前,临界线是根轨迹方程(7.1)的 0 度和 180 度的根轨迹($\xi(s)$函数取得实数值).这两个度数的根轨迹由$\xi(s)$函数的非平凡零点分开，相互间隔分布。临界线上两个相邻的$\xi(s)$函数的非平凡零点之间必有且仅有一个分离点。$\xi^{'}(s)$函数的零点与非平凡零点间隔分布。

③在出现非平凡零点是非简单零点或因式$G_\xi(s)$在临界线上的这一区间相位不是0 或π度之后，临界线上的两个非简单非平凡零点之间的区间是该根轨迹方程的

$-\angle G_{\xi}(0.5+ti)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\pi$ 度的根轨迹，n 为临界线上这个区间至实轴的非平凡零点的个数（含该区间下面的这一个非平凡零点。）。β_j 是非平凡零点指数。临界线上两个相邻的 $\xi(s)$ 函数的非平凡零点之间必有且仅有一个分离点。$\xi^{'}(s)$ 函数的零点与非平凡零点间隔分布。

证明：$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)$ （3.2）

前面已假设了 $\xi(s)$ 函数的非平凡零点全部共轭分布在临界线上。

$s=0.5$ 点的右边的实轴上，没有 $\xi(s)$ 函数的非平凡零点，因此，这一部分实轴是其 0 度的根轨迹，而且是始于 $\xi(s)$ 函数的虚部值最小的非平凡零点 $s=0.5\pm14.1347i$ 。非平凡零点 $s=0.5+14.1347i$ 与非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 之间的临界线上的线段一定是 $\xi(s)$ 函数的 0 度的根轨迹。点 $s=0.5$ 不是 $\xi(s)$ 函数的零极点，它是始于非平凡零点 $s=0.5\pm14.1347i$ 的两条 0 度的根轨迹的交点，是根轨迹的分离点，是 $\xi^{'}(s)$ 函数的零点。所以，靠近实轴，且在实轴上面的，在临界线右边的根轨迹是始于点 $s=0.5+14.1347i$ 的 0 度到 180 度之间各个度数的根轨迹。靠近实轴，且在实轴上面的，在临界线左边的根轨迹是始于非平凡零点 $s=0.5+14.1347i$ 的 180 度到 360 度之间各个度数的根轨迹。靠近实轴，且在实轴下面的，在临界线右边的根轨迹是始于非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 的 180 度到 360 度之间各个度数的根轨迹。靠近实轴，且在实轴下面的，在临界线左边的根轨迹是始于非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 的 0 度到 180 度之间各个度数的根轨迹。

$\xi(s)$ 函数的非平凡零点 $s=0.5+14.1347i$ 与非平凡零点 $s=0.5+21.022i$ ，非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 与非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 之间的临界线上的线段都是该根轨迹方程的 180 度的根轨迹。始于非平凡零点 $s=0.5\pm14.1347i$ 的各个度数的根轨迹“平行”于实轴，以非常接近“直线”的方式终于到无穷远 $\pm\infty\pm ti$ 。始于非平凡零点 $s=0.5+14.1347i$ 的根轨迹簇，按照度数由小到大的顺序，逆时针排列. 始于非平凡零点 $s=0.5-14.1347i$ 的根轨迹簇，按照度数由小到大的顺序，顺时针排列。

以上就把始于 $\xi(s)$ 函数的虚部值小的非平凡零点的根轨迹簇刻画了出来。

下面对定理 2.12 里没有涉及到的更细致的问题,给出证明.

前面假设了 Riemann Hypothesis 成立，对 Eq(3.2)两边微分，

$$\xi^{'}(s)=\frac{1}{2}(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)+\frac{1}{2}s\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)+\frac{1}{4}s(s-1)\Gamma^{'}(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)$$
$$-\frac{\ln\pi}{4}s(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma(s)+\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{s}{2}}\varsigma^{'}(s)$$

即：$$\xi^{'}(s)=\frac{1}{s}\xi(s)+\frac{1}{s-1}\xi(s)+\frac{1}{2}\frac{\Gamma^{'}(\frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}s)}\xi(s)-\frac{\ln\pi}{2}\xi(s)+\frac{\varsigma^{'}(s)}{\varsigma(s)}\xi(s)$$

两边同除以 $\xi(s)$ ，可以得到：$\frac{\xi^{'}(s)}{\xi(s)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2}s)-\frac{1}{2}\ln(\pi)+\frac{\varsigma^{'}(s)}{\varsigma(s)}$ （7. 3），对于临界线上的 $\xi^{'}(s)$ 函数的零点，不妨设为：$0.5\pm t_n i$ ，$\xi^{'}(0.5\pm t_n i)=0$ ，将它代入到上

述等式有：

$$\frac{\varsigma'(0.5\pm t_n i)}{\varsigma(0.5\pm t_n i)}+\frac{1}{0.5\pm t_n i}+\frac{1}{\pm t_n i-0.5}+0.5\psi(0.25\pm 0.5t_n i)-\frac{\ln(\pi)}{2}=0$$，整理可得：

$$\frac{1}{\frac{1}{0.5\pm t_n i}+\frac{1}{\pm t_n i-0.5}+\frac{1}{2}\psi(0.25\pm 0.5t_n i)-\frac{\ln(\pi)}{2}}\frac{\varsigma'(0.5\pm t_n i)}{\varsigma(0.5\pm t_n i)}=-1$$，该式是根轨迹方程 $k\dfrac{\varsigma'(s)}{\varsigma(s)}=a+bi$ 的某个度数的一条根轨迹上的一个点。

当 $t_n\to+\infty$ 时，因为，$\psi(0.25\pm 0.5t_n i)\sim\ln(0.5t_n)$，所以，$\dfrac{1}{0.5\pm t_n i}+\dfrac{1}{\pm t_n i-0.5}+0.5\psi(0.25\pm 0.5t_n i)-\dfrac{\ln(\pi)}{2}$，这是一个无穷大量，尽管，$k\dfrac{\varsigma'(s)}{\varsigma(s)}=a+bi$ 的根轨迹没有具体地给出来，但是，$\xi'(s)$ 函数在临界线上的零点，即根轨迹方程（3.1）的分离点，当越来越远离实轴时，越来越向无穷远 $0.5\pm\infty i$ 方向分布时，就与 $\xi(s)$ 函数的零点的距离越来越近。特别地，当 $t_n=\infty$ 时，在临界线上的这个无穷远点，使 $\xi(0.5\pm\infty i)=0$ 成立。临界线两端的两个无穷远点是 $\xi(s)$ 函数的无穷远零点。

当 $s=+\infty\pm ti$ 时，$\varsigma(+\infty\pm ti)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}0=1$。由 Eq（3.2），所以，$\xi(+\infty\pm ti)=\xi(1-\infty\pm\infty i)=\xi(-\infty\pm ti)=\infty$，这些无穷远点是根轨迹方程（3.1）的终点。

当 $s=+\sigma\pm\infty i$，$\mathrm{Re}(s)>1$ 时，$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}$，$|\varsigma(s)|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{n^s}\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\sigma}$，随着 σ 增大，$|\varsigma(s)|$ 越来越小。因此，在这些无穷远点，$|\varsigma(s)|$ 是有界的量。由 Eq（3.2），所以，$\xi(+\sigma\pm\infty i)=\xi(1-\sigma\pm\infty i)=\infty$，这些无穷远点是根轨迹方程（3.1）的终点。

所以，当 $s=\pm\infty\pm\infty i$ 时，$\xi(\pm\infty\pm\infty i)=\infty$，这些无穷远点是根轨迹方程（3.1）的终点。

Hardy and Littlwood 定理：当 t 充分大时，

$$\varsigma(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}+X(s)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-s}}+O((x)^{-\sigma})+O(|t|^{0.5-\sigma}y^{\sigma-1})，$$

$X(s)=\dfrac{\pi^{s-0.5}\Gamma(0.5-0.5s)}{\Gamma(0.5s)}$，$0<\sigma<1$，$x>h>0$，$y>h>0$，$2\pi xy=|t|$，特别地，令 $y=1$，则 $x=\dfrac{|t|}{2\pi}$，令：$N=[x]$ 在 $\dfrac{1}{2}<\sigma\le 1$ 的区域里，可以有如下关系：$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^s}+X(s)+O((\dfrac{1}{N})^{\sigma-0.5})$，特别地，在 $\dfrac{1}{2}<\sigma\le 1$ 的无穷远点，$X(\sigma+0.5\infty)=0$，$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 成立，所以，$\varsigma(\sigma\pm\infty i)=\pm\infty$ 成立，因此，综上所述，

在 $\sigma > 0.5$ 的复平面上所有的无穷远点， $\xi(s)$ 函数都一定是无穷大量。由于， $\xi(s)=\xi(1-s)$，所以，$\xi(s)$ 函数在 $\sigma < 0.5$ 的复平面上所有的无穷远点，也一定都是无穷大量。这些无穷远点是根轨迹方程（3.1）的终点。

上面是对 $\xi(s)$ 函数在临界线上的非平凡零点是单零点的情况时，给出的证明。临界线是 $\xi(s)$ 函数的 0 度和 180 度的根轨迹，相邻的非平凡零点间的临界线上的线段是同度数的根轨迹，因为它们始于不同的非平凡零点，所以一定要有相交的交点存在，这样，就在临界线上，产生了根轨迹的分离点，这两个同度数的根轨迹都自分离点进入到了复平面上，再终于到无穷远。

如果 $\xi(s)$ 函数在临界线上可能有重非平凡零点，始于重零点的根轨迹，可不可能与临界线上的同度数的根轨迹再相交？

这种情况发生了，并不影响临界线上相邻的 $\xi(s)$ 函数的非平凡零点间产生出分离点。

与始于重的非平凡零点的同度数的根轨迹与临界线相交，且相交的根轨迹没有把与它在临界线上相邻的 $\xi(s)$ 函数的非平凡零点间产生出分离点包围了，同度数的两条临界线外的根轨迹组成了一个封闭的区域，在这个封闭的区域内，存在着始于 $\xi(s)$ 函数的同一个非平凡零点的至少两个完整的根轨迹簇，在这两个根轨迹簇里，始于同一个非平凡零点的还有其他度数的根轨迹，它们不能穿越封闭线，而使它们不能找到自己的终点。所以，这种情况不能出现。

始于重零点的临界线外的两条根轨迹，与它相邻的非平凡零点在临界线上的根轨迹在临界线上相交了。与前一种方式不同的是，这样的相交，就把临界线上它们的分离点封闭在了两条相交的同度数的根轨迹的封闭的区域内了。这个不同点并没有影响到始于重零点的两个完整的根轨迹簇，也被封闭在了两条相交的同度数的根轨迹的封闭的区域内了。所以这样的情况基于同样的理由也不能出现。

这样就证明了，始于同一个非平凡重零点的根轨迹不能与临界线相交。也证明了 $\xi(s)$ 函数在临界线上的非平凡零点中有重零点时，在临界线上， $\xi(s)$ 函数的相邻非平凡零点间仅有一个 $\xi^{'}(s)$ 函数的零点，即上述根轨迹段里有且仅有一个分离点。从前面的这些证明里，完全可以得到 $\xi(s)$ 函数的临界线上的 r 重非平凡零点对本文里的证明结论等问题没有影响。

用上面的方法同样可以证明始于 $\xi(s)$ 函数的非平凡重零点的同度数的根轨迹之间，不能相交。

$\xi(s)$ 函数的非平凡零点关于临界线和实轴都对称，且是共轭函数，因此，其不含零点的因式 $G_{\xi}(s)$，成立 $G_{\xi}(s)=G_{\xi}(1-s)$ 关系，所以，引理 3.1 中条件满足定理 2.12。因此，在引理 3.1 中给出的结论都是正确的,这里不再详细给出了。证毕。

[参考文献] (References)

[1] Richard C.Dorf, Robert H.Bishop, Modern Control Systems, [M], Amerca, Addison Wesley Longmen, Ninth Edition, 2002.

[2] Li YuMing, Ma ZhaoKun, Automatic Control Principle, [M], China,Beijing, Chemical Industry Press, 2005.

[3] Hardy G. H.,Littlewood J.E. The zero of Riemann's zeta-function on the critical line, [J],Math.Z. 1921, 10(3-4):283-317.

[4] Selberg, Atle, Contributions to the theory of the Riemann zeta function, [J], Arch. Math. Naturvid.1946,48(5):89-155.
[5] Weil, Andre,Numbers of solution of equations in finite fields, [J], Bulletin of the American Mathematical Society, 1949, 55(5):497-508.