

分离变量法时空方程求解次序的讨论

孙荣奇¹, 彭秀艳², 牛屹², 徐润章³

(1. 哈尔滨工程大学核学院, 哈尔滨 150001;

2. 哈尔滨工程大学自动化学院, 哈尔滨 150001;

3. 哈尔滨工程大学理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 当求解一维线性齐次波动方程的初边值问题时, 分离变量法使得偏微分方程转化成两个分别关于时间和空间的常微分方程. 对于这两个常微分方程, 本文通过分析论证回答了应该先求解哪个方程的问题.

关键词: 一阶齐次波动方程; 分离变量法; 求解次序

中图分类号: O175.22

The discussion of solving order for separation of variables applied to the space time equation

SUN Rongqi¹, PENG Xiuyan², NIU Yi², XU Runzhang³

(1. Nuclear Science and Technology school, Harbin Engineering University, Harbin 150001;

2. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001;

3. College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001)

Abstract: When the initial boundary value problem for one-dimensional linear homogeneous wave equation is solved, separation of variables makes partial differential equations into two ordinary differential equations in time and space. For these two ordinary equations, the problem that which equations should be solved first is demonstrated in this paper.

Keywords: one-dimensional homogeneous wave equation; separation of variables; solving order

0 引言

分离变量法是一种求解常微分方程或偏微分方程的解析方法. 使用这种方法, 我们可以藉代数来将方程重新编排, 让方程的一部分只含有一个变量, 而剩余部分则跟此变量无关. 这样, 隔离出的两个部分的值, 都分别等于某一常数^[1]. 分离变量法在求解狄拉克方程, 费米方程等非线性数理方程上有着极为重要的应用^[2-7].

本文研究如下齐次边界条件下的一维波动方程的初边值问题

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, 0 < x < l, t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (3)$$

一维波动方程的初边值问题在很多相关书籍上都被列为利用分离变量法求解的范例. 在利用分离变量法将波动方程转化为两个常微分方程时, 我们面临先求解关于 x 的方程还是先求解关于 t 的方程的问题. 在参阅文献^[8-10]时, 发现作者都是直接先求解关于 x 的常微分方程后求解关于 t 的常微分方程. 但是, 对于这样的求解次序相关文献都没有给出一个清晰的解释. 我们有理由问这样的求解次序是必要的吗? 如果先求解关于 t 的常微分方程, 后求解关于 x 的常微分方程会有什么样的结果呢? 本文将主要来解释这一问题.

作者简介: 孙荣奇, (1991-), 男. E-mail: srq123@hrbeu.edu.cn

通信联系人: 徐润章, 男, 哈尔滨工程大学-理学院-数学研究中心-副教授, 博士, 硕士生导师, 研究方向: 系统理论, 非线性动力系统. E-mail: xurunzh@163.com

40 1 方程求解次序的分析

利用分离变量法令 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 将 $u(x, t)$ 带入 (1)-(3), 将一维波动方程分离变量后得到两个分别关于 x 与 t 的常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (4)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (5)$$

$$45 \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (6)$$

$$X(x)T(0) = \phi(x), \quad X(x)T'(0) = \psi(x). \quad (7)$$

通常先解关于 x 的常微分方程, 然后再求解关于 t 的常微分方程.

假设可以先求解关于 t 的常微分方程, 根据常微分方程的特征值分情况讨论分别给出通解, 再代入初始条件, 则得到如下结果.

50 1.1 第一步: 求解 $T(t)$.1.1.1 当 $\lambda < 0$ 时.

$$T(t) = Ae^{at\sqrt{-\lambda}} + Be^{-at\sqrt{-\lambda}} \quad (\text{其中 } A, B \text{ 是常数}). \quad (8)$$

根据初始条件 (7) 和 $X(x) \neq 0$, 得到

$$T(0) = \frac{\phi(x)}{X(x)}, \quad T'(0) = \frac{\psi(x)}{X(x)}.$$

55 将上式代入式 (8), 得到

$$T(0) = (Ae^{at\sqrt{-\lambda}} + Be^{-at\sqrt{-\lambda}})|_{t=0} = A + B = \frac{\phi(x)}{X(x)},$$

$$T'(0) = (Aa\sqrt{-\lambda}e^{at\sqrt{-\lambda}} - Ba\sqrt{-\lambda}e^{-at\sqrt{-\lambda}})|_{t=0} = a\sqrt{-\lambda}(A - B) = \frac{\psi(x)}{X(x)}.$$

从中解出 A, B

$$A = \frac{1}{2X(x)}\left(\phi(x) + \frac{\psi(x)}{a\sqrt{-\lambda}}\right), \quad B = \frac{1}{2X(x)}\left(\phi(x) - \frac{\psi(x)}{a\sqrt{-\lambda}}\right)$$

60 将 A, B 代入 (8) 式可知

$$T(t) = \frac{1}{2X(x)}\left(\phi(x) + \frac{\psi(x)}{a\sqrt{-\lambda}}\right)e^{at\sqrt{-\lambda}} + \frac{1}{2X(x)}\left(\phi(x) - \frac{\psi(x)}{a\sqrt{-\lambda}}\right)e^{-at\sqrt{-\lambda}}. \quad (9)$$

1.1.2 当 $\lambda = 0$ 时.

$$T(t) = At + B \quad (\text{其中 } A, B \text{ 是常数}). \quad (10)$$

根据初始条件 (7) 和 $X(x) \neq 0$, 得到

$$65 \quad T(0) = \frac{\phi(x)}{X(x)}, \quad T'(0) = \frac{\psi(x)}{X(x)}.$$

将上式代入式 (10), 得到

$$T(0) = (At + B)|_{t=0} = B = \frac{\phi(x)}{X(x)}, T'(0) = A|_{t=0} = A = \frac{\psi(x)}{X(x)}.$$

将 A, B 代入 (10) 式, 得到

$$T(t) = \frac{\psi(x)}{X(x)}t + \frac{\phi(x)}{X(x)}. \quad (11)$$

70 1.1.3 当 $\lambda > 0$.

$$T(t) = A \cos a\sqrt{\lambda}t + B \sin a\sqrt{\lambda}t \quad (\text{其中 } A, B \text{ 是常数}). \quad (12)$$

根据初始条件 (7), 得到

$$T(0) = \frac{\phi(x)}{X(x)}, T'(0) = \frac{\psi(x)}{X(x)}.$$

将上式代入式 (12), 得到

$$\begin{aligned} 75 \quad T(0) &= (A \cos a\sqrt{\lambda}t + B \sin a\sqrt{\lambda}t)|_{t=0} = A = \frac{\phi(x)}{X(x)}, \\ T'(0) &= (-Aa\sqrt{\lambda} \sin a\sqrt{\lambda}t + Ba\sqrt{\lambda} \cos a\sqrt{\lambda}t)|_{t=0} = Ba\sqrt{\lambda} = \frac{\psi(x)}{X(x)}. \end{aligned}$$

从中解出 A, B

$$A = \frac{\phi(x)}{X(x)}, B = \frac{\psi(x)}{a\sqrt{\lambda}X(x)}.$$

将 A, B 代入 (12) 式,

$$80 \quad T(t) = \frac{1}{X(x)} (\phi(x) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(x)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t) \quad (13)$$

从式 (9), (11), (13) 可知, $T(t)$ 的表达式中包含 $X(x)$, 所以为了求解 $T(t)$, 我们有两个思路. 一个是将 $T(t)$ 的表达式变形, 将 $X(x)$ 用包含 $T(t)$ 的式子表示出来, 再代入方程 (4) 和边界条件 (6), 利用方程 (4) 和边界条件 (6) 确定出 $T(t)$. 另外一个便是直接求解 $X(x)$ 的方程, 然后代入 $T(t)$ 确定出 $T(t)$.

85 1.2 第二步

将 $X(x)$ 用包含 $T(t)$ 的式子表示出来, 再代入方程(4)和边界条件(6)进行分析.

1.2.1 当 $\lambda < 0$ 时.

因为 $T(t)$ 不恒为 0, 由 (9) 式求解出 $X(x)$, 得到

$$X(x) = \frac{1}{2T(t)} ((e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})\phi(x) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} - e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}\psi(x)) \quad (14)$$

90 首先我们利用边界条件 (6) 求解 $T(t)$.

将 $x=0, x=l$ 分别代入式 (14) 然后代入边界条件, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2T(t)}((e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})\phi(0) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}\psi(0)) = 0 \\ \frac{1}{2T(t)}((e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})\phi(l) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}\psi(l)) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

根据初始条件 (7), 得到

$$X(0)T(0) = \phi(0), \quad X(0)T'(0) = \psi(0).$$

95

$$X(l)T(0) = \phi(l), \quad X(l)T'(0) = \psi(l).$$

由边界条件 (6) 有

$$\phi(0) = \psi(0) = \phi(l) = \psi(l) = 0.$$

即

$$\begin{cases} (e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})\phi(0) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}\psi(0) = 0 \\ (e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})\phi(l) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}\psi(l) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

100 所以对于任意不恒为 0 的 $T(t)$ 都使方程 (15) 成立. 因此利用边界条件 (6) 求解不出 $T(t)$.

然后我们利用方程 (4) 求解 $T(t)$.

将式(14)中的 $X(x)$ 代入式 (4), 得到

$$X(x) = \frac{1}{2T(t)}((e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})(\phi''(x) + \lambda\phi(x)) + (\psi''(x) + \lambda\psi(x))\frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} - e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}) = 0$$

105

因为 $\phi''(x) + \lambda\phi(x)$ 与 $\psi''(x) + \lambda\psi(x)$ 依然是关于 x 和 λ 的函数, 所以可令

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = f(x, \lambda), \quad \psi''(x) + \lambda\psi(x) = g(x, \lambda).$$

于是

$$\frac{1}{2T(t)}((e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})f(x, \lambda) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} - e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}g(x, \lambda)) = 0. \quad (17)$$

110 因为 $\frac{1}{2T(t)} \neq 0$, 所以式 (17) 要成立, 有

$$(e^{at\sqrt{-\lambda}} + e^{-at\sqrt{-\lambda}})f(x, \lambda) + \frac{e^{at\sqrt{-\lambda}} - e^{-at\sqrt{-\lambda}}}{a\sqrt{-\lambda}}g(x, \lambda) = 0. \quad (18)$$

式 (14) 对所有的 $0 \leq x \leq l$ 以及 $t \geq 0$ 都要成立, 下面验证式 (18) 是否成立.

将式 (18) 中含 t 的项与含 x 的项分离, 得到

$$e^{2at\sqrt{-\lambda}} = \frac{g(x, \lambda) - a\sqrt{-\lambda}f(x, \lambda)}{g(x, \lambda) + a\sqrt{-\lambda}f(x, \lambda)}.$$

115 将上式两边对 t 求导, 得到

$$2a\sqrt{-\lambda}e^{2at\sqrt{-\lambda}} = 0.$$

上式是显然不成立的, 即式 (18) 不成立. 又因为 $\frac{1}{2T(t)} \neq 0$, 所以方程 (17) 不成立. 即对任意的不为 0 的 $T(t)$ 都不满足方程 (17).

故 $\lambda < 0$ 应舍去.

120 1.2.2 当 $\lambda = 0$ 时.

因为 $T(t)$ 不为 0, 由 (11) 式求解出 $X(x)$, 得到

$$X(x) = \frac{\psi(x)}{T(t)}t + \frac{\phi(x)}{T(t)}.$$

即

$$X(x) = \frac{1}{T(t)}(\psi(x)t + \phi(x)) \quad (19)$$

125 首先我们利用边界条件 (6) 求解 $T(t)$.

将分别代入式 (19), 然后边界条件 (6), 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{T(t)}(\psi(0)t + \phi(0)) = 0 \\ \frac{1}{T(t)}(\psi(l)t + \phi(l)) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

因为

$$\begin{aligned} \phi(0) = \psi(0) = \phi(l) = \psi(l) = 0. \\ \begin{cases} \psi(0)t + \phi(0) = 0 \\ \psi(l)t + \phi(l) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 对任意的 $t \geq 0$ 都成立, 所以对于任意不为 0 的 $T(t)$ 都使方程 (20) 成立. 因此
130 利用边界条件 (6) 求解不出 $T(t)$.

然后我们利用方程 (4) 求解 $T(t)$.

再将式 (19) 中的 $X(x)$ 代入式 (4), 得到

$$\frac{t}{T(t)}(\phi''(x) + \lambda\phi(x)) + \frac{1}{T(t)}(\psi''(x) + \lambda\psi(x)) = 0.$$

$$\text{即} \quad \frac{t}{T(t)}f(x, \lambda) + \frac{1}{T(t)}g(x, \lambda) = 0 \quad (22)$$

135 因为 $\frac{1}{T(t)} \neq 0$, 所以式 (22) 要成立, 有

$$tf(x, \lambda) + g(x, \lambda) = 0 \quad (23)$$

式 (23) 对所有的 $0 \leq x \leq l$ 以及 $t \geq 0$ 都要成立. 下面验证式 (23) 是否成立.

将式 (18) 中含 t 的项与含 x 的项分离, 得到

$$t = \frac{-g(x, \lambda)}{f(x, \lambda)}$$

140 将上式两边对 t 求导, 得到

$$1=0.$$

上式是显然不成立的, 即式 (23) 不成立. 又因为 $\frac{1}{T(t)} \neq 0$, 所以方程 (22) 不成立.

故 $\lambda = 0$ 应舍去.

1.2.3 当 $\lambda > 0$ 时.

145 因为 $T(t)$ 不为 0, 由式 (13) 求解出 $X(x)$, 得到

$$X(x) = \frac{1}{T(t)} (\phi(x) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(x)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t). \quad (24)$$

首先我们利用边界条件 (6) 求解 $T(t)$.

将 $x=0$, $x=l$ 分别代入式 (24) 然后代入边界条件 (24), 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{T(t)} (\phi(0) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(0)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t) = 0 \\ \frac{1}{T(t)} (\phi(l) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(l)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

150 因为

$$\phi(0) = \psi(0) = \phi(l) = \psi(l) = 0.$$

即

$$\begin{cases} \phi(0) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(0)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t = 0 \\ \phi(l) \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{\psi(l)}{a\sqrt{\lambda}} \sin a\sqrt{\lambda}t = 0 \end{cases}. \quad (26)$$

所以对于任意不恒为 0 的 $T(t)$ 都使方程 (20) 成立. 因此利用边界条件 (6) 求解不出 $T(t)$.

155 然后我们利用方程 (4) 求解 $T(t)$. 将式 (24) 中的 $X(x)$ 代入式 (4), 得到

$$\frac{1}{T(t)} \cos a\sqrt{\lambda}t (\phi''(x) + \lambda \phi(x)) + \frac{1}{T(t)} \frac{\sin a\sqrt{\lambda}t}{a\sqrt{\lambda}} (\psi''(x) + \lambda \psi(x)) = 0 \quad (27)$$

因为 $\frac{1}{T(t)} \neq 0$, 所以式 (27) 要成立, 有

$$\cos a\sqrt{\lambda}t (\phi''(x) + \lambda \phi(x)) + \frac{\sin a\sqrt{\lambda}t}{a\sqrt{\lambda}} (\psi''(x) + \lambda \psi(x)) = 0 \quad (28)$$

下面证明式 (28) 在一定的条件的情况下是成立的.

160 式 (28) 要对所有的 $0 \leq x \leq l$ 以及 $t \geq 0$ 都要成立, 所以必须有

$$\phi''(x) + \lambda \phi(x) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\psi''(x)}{a\sqrt{\lambda}} + \lambda \frac{\psi(x)}{a\sqrt{\lambda}} = 0. \quad (30)$$

因为上述两方程的边界条件为

$$\phi(0) = \psi(0) = \phi(l) = \psi(l) = 0. \quad (31)$$

165 根据方程 (29), (30) 和边界条件 (31) 分别解出

$$\phi(x)_n = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \quad (32)$$

$$\psi(x)_n = d_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \quad (33)$$

由于 $\phi(x), \psi(x)$ 是任意给定的已知初始函数且不仅限于上述求解出的表达式 (32)

(33). 又由于 (29) 式和 (30) 式是齐次的和线性的. 故由叠加原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ 和

170 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$ 也分别是问题 (29), (30) 的解, 而这只需将 $\psi(x)$ 按照 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} \right\}$ 展开即可, 即

$$\phi(x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

其中

$$175 \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$d_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

于是便可使 (29), (30) 成立, 即 (28) 成立.

故式 (27) 无法解出 $T(t)$. 因此利用边界条件 (6) 求解不出.

所以 $\lambda > 0$ 时, 在先求解关于 t 的方程情况下, 利用已知的条件我们确定不出 $T(t)$.

180 **1.3 第三步直接求解关于 $X(x)$ 的方程, 然后代入 $T(t)$ 确定 $T(t)$.**

利用分离变量法我们可以将一维波动方程转化为关于 x 和 t 两个常微分方程, 当我们首先求解 $X(x)$ 时根据边界条件得出 λ 不是一个值, 而是一系列的值 λ_n , 继而得到 $X(x)$ 的一系列的解 $X_n(x)$, 随后得到 $T(t)$ 的一系列的解 $T_n(t)$, 最后得到 $u(x, t)$ 一系列的解 $u_n(x, t)$, 我们发现单个或有限多个 $u_n(x, t)$ 是不满足初始条件的, 将无限多个 $u_n(x, t)$ 累加起来得到

185 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$, 因为方程是线性齐次的所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 也是方程的解, 而且这样的解能满足初始条件. 但是如果我们首先求解 $T(t)$, 得到的 $T(t)$ 的表达式中包含 λ 和 $X(x)$, 且应用初始条件求解不出 λ , 再求解 $X_n(x)$, 由上述讨论可知, $\lambda < 0$ 和 $\lambda = 0$ 两种情况已被舍去, 只讨论 $\lambda > 0$ 的情况. 这时根据边界条件可以解出, 解法同方程 (29), (30).

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

190
$$X_n(x) = b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

将 λ_n , 式 (32), 式 (33) 代入 $T_n(x)$, 式得到

$$T_n(x) = \frac{1}{X_n(x)} \left(c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi a}{l} t \right).$$

得到

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= T_n(x) X_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a}{l} t \\ 195 \quad &= \left(c_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned}$$

只有将一系列的 $u_n(x, t)$ 累加起来才能满足初始条件, 所以

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

其中
$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$d_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

200 我们得到与文献^[8-10]一样的方程的解.

2 结论

从上面的讨论可以看出, 问题的关键是求解出 λ , 而通过求解关于 t 的方程, 我们确定不出 λ , 而只有通过求解关于 x 的方程, 我们才能确定出 λ . 所以对于利用分离变量法求解齐次边界条件下的一阶齐次波动方程时首先求解关于 x 的方程.

205 3 致谢与作者贡献说明

以上所讨论的问题是哈尔滨工程大学理学院徐润章老师在一次数学物理方法课堂上提出来的.在我写此文的过程中,徐老师给予了我巨大的帮助,他抽出宝贵的时间与我讨论,给我指明了分析问题的方法.作为一个本科生,由于这是我第一次撰写科技论文,在本文写作的过程中,我遇到巨大的困难.徐老师事无巨细,悉心指导.在行文的逻辑结构,语言的组织甚至文章格式等方面徐老师给予了我建设性的意见.尽管我邀请徐老师作为文章的作者,我依然要致以我诚挚的谢意.

参考文献

- 215 [1] Polyanin A D, Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists[M]. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2002: 27-30.
- [2] Villalba V M. Separation of variables and exact solution of the Dirac equations in some cosmological backgrounds[J]. New York, Nova. Sci. Publ, 2010: 305-331.
- [3] Kuznetsov Y I. Separation of variables in nonlinear Fermi equation[J]. Hackensack, World Sci. Publ., 2010: 348-353.
- 220 [4] Barannyk A F, Barannyk T.A, Yuryk I I. Generalized separation of variables and exact solutions of nonlinear equations[J]. Ukrainian Math. J., 2011, 62(12): 1851-1865.
- [5] Falqui G, Marco P. Poisson pencils, algebraic integrability, and separation of variables. Regul. Chaotic Dyn., 2011, 16(3-4): 223-244, 1468-4845.
- 225 [6] Anatoliy F B, Tatjana A B, Ivan I Y. Generalized Separation of Variables for Nonlinear Equation. Reports on Mathematical Physics, 2013, 71(1): 1-13.
- [7] Tada T, Saitoh S. A method by separation of variables for the second order ordinary differential equations[J]. Int. J. Math. Sci. 2004, 3(2): 285-292.
- [8] 顾樵. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [9] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法 I[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- 230 [10] 李元杰. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.