

轴压作用下钢管混凝土方形柱的组合刚度分析

陈辉

武汉理工大学工程结构与力学系, 武汉 (430070)

E-mail: chenhui0304@gmail.com

摘 要: 本文基于连续介质力学理论, 对方形钢管混凝土柱进行小变形下的弹性理论分析, 得到了方形钢管混凝土柱弹性阶段紧箍力大小和考虑紧箍作用下钢管混凝土的组合轴压刚度。结果表明, 钢管混凝土柱组合轴压刚度与简单地把钢管刚度和混凝土刚度叠加起来的换算轴压刚度相比, 能够提高 6.5%-25.08%。由理论计算得到的钢管混凝土的组合轴压刚度与统一理论计算的结果相近。

关键词: 钢管混凝土; 组合轴压刚度; 紧箍力

中图分类号: TU398+.9

1 引言

钢管混凝土是指在钢管中填充混凝土而形成, 它把两种不同性质的材料结合在一起共同工作, 充分发挥了钢材受拉性能高和混凝土受压性能好的优点。它具有承载力高、塑性和韧性好、抗震性能好、经济效益显著和施工简便等许多优点, 因而近几十年在工程中得到了广泛的应用^[1,2]。

钢管混凝土的增强机理, 在于轴向受压时矩形钢管对核心混凝土产生套箍作用, 使管内混凝土处于三向受压状态, 从而使其总体承载力大大提高。关于钢管混凝土的轴压刚度, 国内外许多规范和文献都采用换算刚度^[3], 它只是简单地把钢管轴压刚度和混凝土轴压刚度叠加了起来, 并没有考虑钢管对核心混凝土的紧箍力效应。一般情况下, 三向受压混凝土的弹性模量要比单向受压时的高, 所以换算刚度并不能真实代表钢管混凝土柱的实际轴压刚度^[4,5]。

2 计算理论介绍

2.1 计算模型的建立

首先研究轴压作用下, 对于图 1(a) 所示方形钢管混凝土的加载方式, 可建立图 1(b) 所示的组合柱体计算模型。在小变形情况下, 组合柱体端面分布的应力场使钢管和混凝土产生相同的纵向应变, 这样便构成了弹性力学的广义平面应变问题。为简单起见, 首先按平面应力问题来求解。

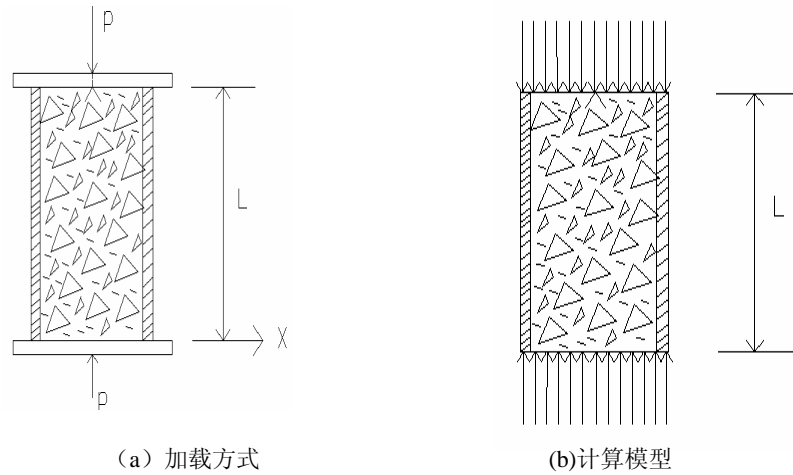


图1 组合柱截面

为了研究钢管和混凝土中内力的变化,把处于复杂应力状态下的钢管混凝土的各个内力分解开来,如图2(a)和图2(b)。

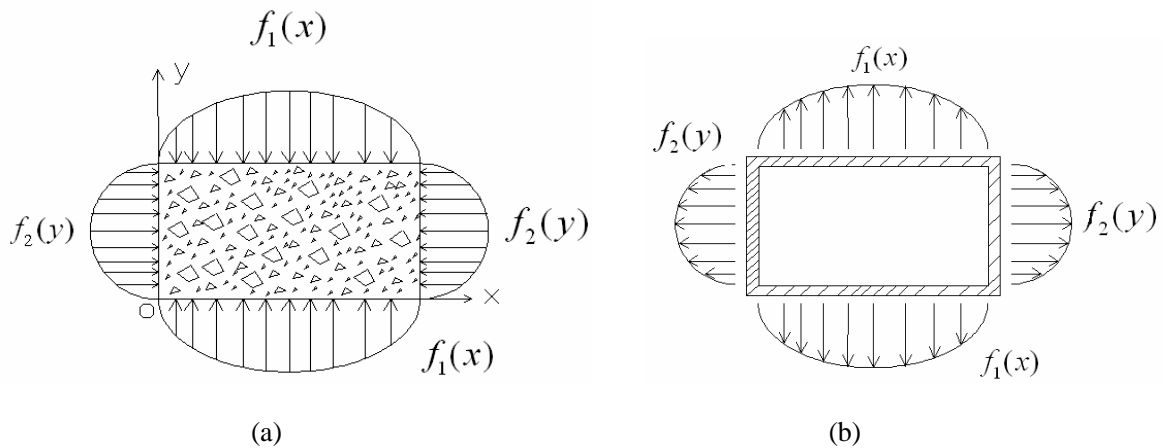


图2 混凝土和外包钢管的相互作用

2.2 混凝土的位移求法

1) 用弹性力学方法求解图2(a)所示的平面问题。

采用三角级数求解, 应力函数 $\varphi(x, y)$ 和法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 均以三角级数的形式表示。

用逆解法, 首先假设应力函数 $\varphi(x, y)$ 取如下形式:

$$\varphi(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} F(y) \quad (1)$$

由弹性力学^[6], 得到应力函数通解为:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} [A_n ch(\partial y) + B_n sh(\partial y) + C_n ych(\partial y) + D_n ysh(\partial y)] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{a} [A'_n ch(\partial y) + B'_n sh(\partial y) + C'_n ych(\partial y) + D'_n ysh(\partial y)] \end{aligned} \quad (2)$$

为了便于求解, 现在图2(a)混凝土柱的侧面受力拆分为两部分进行叠加, 见图3(A)

和 (B)。

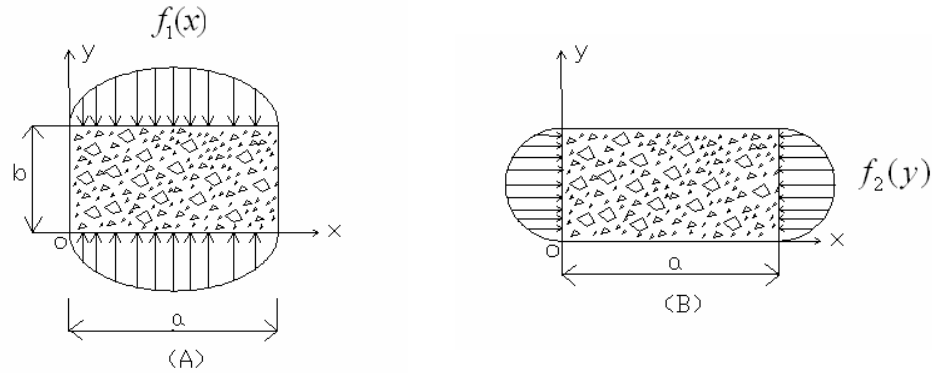


图 3 混凝土的受力拆分

对于图 3 (A) 的单项受压, 边界条件有:

$$x=0, a; \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

其中四个待定系数 A_n, B_n, C_n, D_n 可由 (3) 式边界条件确定:

$$\begin{aligned} y=0; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -f_1(x), \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \\ y=b; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -f_1(x), \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2) 边界力函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 的确定

为了便于求解, 现分别将待定的边界力函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 展开成下列余弦级数:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \cos \frac{m\pi x}{a} = \xi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \cos \frac{m\pi x}{a} \\ f_2(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \cos \frac{m\pi y}{b} = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos \frac{m\pi y}{b} \end{aligned} \quad (4)$$

为了分析方便, 可以依次先求出展开式 (3) 中的各单项力 $\cos \frac{m\pi x}{a}$ 和 $\cos \frac{m\pi y}{b}$ 单独作用引起的钢管混凝土柱周边的各点的法向位移 $\Delta_m^{(1)}$, $\Delta_m^{(1)}$ 。

对于每一个求和序列 n , 都可以解出待定系数 A_n, B_n, C_n, D_n , 因此可以得到钢管混凝土柱

在单项力 $\cos \frac{m\pi x}{a}$ 作用下的应力函数 $\varphi_m(x, y)$ 。

3) 单项力 $\cos \frac{m\pi x}{a}$ 作用下方形混凝土周边的法向位移的求法

由弹性力学^[6] 中上物理方程和几何方程可得:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx + g_1(y) \\
 v(x, y) &= \int \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dy + g_2(x)
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{其中 } E_1 = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu_c}{1 - \nu_c^2}$$

同理, $x=0; x=b$ 边上有单项力 $\cos \frac{m\pi y}{b}$ 作用, 同样可以求出单项力 $\cos \frac{m\pi y}{b}$ 作用

下的混凝土周边的法向位移 $\Delta_m^{(2)}$ 。

法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 作用下周边法向位移可表示为级数形式:

$$\Delta_c^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \Delta_m^{(1)}; \quad \Delta_c^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \Delta_m^{(2)} \quad (6)$$

其中, $\Delta_c^{(1)}, \Delta_c^{(2)}$ 分别为法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 作用下的混凝土柱周边法向位移; ξ_m, β_m 为级数展开系数; $\Delta_m^{(1)}, \Delta_m^{(2)}$ 分别为级数展开式中单项力作用下的混凝土柱周边法向位移。

2.3 钢架的位移求法

1) 用结构力学方法求解图 4(b)所示的超静定方形闭合刚架问题。

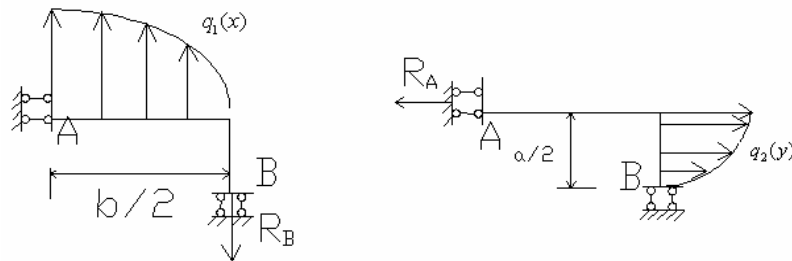


图 4 等效钢架图 (1/4)

由对称关系, 图 2 (B) 所示的闭合钢架相当于图 4 的 1/4 钢架。两端支座均为滑动固定支座, 其特点是有转动约束, $\theta_A = \theta_B = 0$, $Q_A = Q_B = 0$, 同样将周边的作用力拆分为两个部分 (图 4):

$$q_1(x) = \cos \frac{m\pi x}{a}; \quad q_2(y) = \cos \frac{m\pi y}{b};$$

因此它们的力学分析简图可分别由图 5 的左右侧模型代替;

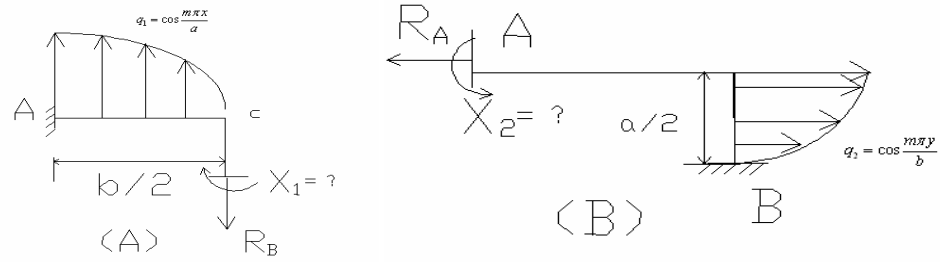


图 5 力学分析模型

这里要分别解出一个多余约束弯矩（对于图 5（A）为 X_1 ；对于图 5（B）为 X_2 ，这是一个一次超静定钢架问题，变形协调为 $\theta_A = \theta_B = 0$ ；单个力引起的转角如下：

$$\theta_B = \theta_q + \theta_R + X_1 \delta_1 = 0, \text{ 则 } X_1 = -\frac{\theta_q + \theta_R}{\delta_1} \quad (7)$$

而变形量（转角） θ_q ($q_1(x) = \cos \frac{m\pi x}{a}$ 引起)； θ_R （支座反力引起）和 δ_1 （单位力矩引起）可分别由结构力学中的莫尔积分求得：

$$\theta_q = \int_0^a \frac{M_q(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_q(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_q(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_q(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (8a)$$

$$\theta_R = \int_0^a \frac{M_R(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_R(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_R(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_R(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (8b)$$

$$\delta_1 = \int_0^a \frac{M_0(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_0(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_0(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_0(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (8c)$$

式中， $M_q(x)$ ， $M_R(x)$ 和 $M_0(x)$ 分别表示外荷载 q_1 ，支座反力 θ_R 和单位力矩（ $X_1 = 1$ ）作用在钢架长边 AC 段产生的弯矩表达式，而 $M_q(y)$ ， $M_R(y)$ 和 $M_0(y)$ 分别表示相应的外荷载在钢架短边 CB 段产生的弯矩表达式。 $N_q(x)$ ， $N_R(x)$ ， $N_0(x)$ 分别是相应的轴力表达式。

同理：可由变形协调条件 $\theta_A = 0$ 求出多余约束弯矩 X_2 ；

$$\theta_B = \theta_{qA} + \theta_{RA} + X_2 \delta_{1A} = 0, \text{ 则 } X_2 = -\frac{\theta_{qA} + \theta_{RA}}{\delta_{1A}} \quad (9)$$

2) 单项力作用下的周边法向位移的求法

利用结构力学位移计算一般公式求出钢架周边法向位移：

$$\Delta_q = \int_0^a \frac{M_q(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_q(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_q(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_q(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (10a)$$

$$\Delta_R = \int_0^a \frac{M_R(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_R(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_R(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_R(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (10b)$$

$$\Delta_1 = \int_0^a \frac{M_0(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_0(y) \cdot M_0(y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{N_0(x) \cdot N_0(x)}{EF} dx + \int_0^b \frac{N_0(y) \cdot N_0(y)}{EF} dy \quad (10c)$$

利用结构力学知识可确定方形闭合刚架在级数展开式中单项力作用下的周边法向位移 $\bar{\Delta}_m^{(1)}$, $\bar{\Delta}_m^{(2)}$ 。方形闭合刚架在张开力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 作用下周边法向位移可表示为级数形式:

$$\Delta_s^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \bar{\Delta}_m^{(1)}; \quad \Delta_s^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \bar{\Delta}_m^{(2)} \quad (11)$$

其中, $\Delta_s^{(1)}$, $\Delta_s^{(2)}$ 分别为法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 作用下的钢管周边法向位移; ξ_m, β_m 为级数展开系数; $\bar{\Delta}_m^{(1)}$, $\bar{\Delta}_m^{(2)}$ 分别为级数展开式中单项力作用下的钢管周边法向位移。

2.4 系数 ξ_m 和 β_m 的确定

1) 根据钢管和混凝土界面侧向位移协调条件:

$$(\Delta_s^{(1)} + \Delta_s^{(2)}) + (\Delta_c^{(1)} + \Delta_c^{(2)}) = \Delta \quad (12)$$

其中, Δ 为解除混凝土和钢管相互约束后, 混凝土柱和钢管分别在轴向力 N_c , N_s 作用下, 单向应力状态下侧向位移的差值。

由方程 (11) 和 (12) 得到:

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\xi_m (\bar{\Delta}_m^{(1)} + \Delta_m^{(1)}) + \beta_m (\bar{\Delta}_m^{(2)} + \Delta_m^{(2)})] = \Delta \quad (13)$$

另外, 以下关系式存在:

$$N_c + N_s = P \quad (14)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s \quad (\text{纵向应变相等}) \quad (15)$$

联立方程 (13), (14) 和 (15), 对方程在周边上利用最小二乘法配点, 即可求出 ξ_m , β_m 。

至此, 可有效确定界面处的相互作用法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 。

$$2) \text{ 定义钢管混凝土的组合名义纵向应力为: } \sigma_z = \frac{N}{A_0} \quad (16)$$

$$\text{式中, } A_0 = A_s + A_c, \quad N = \sigma_s A_s + \sigma_c A_c$$

将结果运用到方程 (15) 和 (16), 即可得到方形钢管混凝土组合体的应力——应变关系。方形钢管混凝土组合体的组合轴压弹性模量也就可以得到, 用符号 E_z 表示, 进而可得到方形钢管混凝土组合体的组合轴压刚度为 $E_z A_0$ 。

3 计算实例说明

方形钢管混凝土柱, 其边长 $a=b=300\text{mm}$; 钢管厚度 $t=5\text{mm}$; 含钢率 $a=0.067$ 混凝土的标号为 C30; 钢管采用 Q235 钢材。

依据以上理论, 借助 matlab 编程计算可得到:

混凝土与外围钢管相互作用系数: $\xi_0 = \beta_0 = 0.252$; $\xi_2 = \beta_2 = 0.1139$; $\xi_4 = \beta_4 = 0.0147$;

于是可以得到界面上的相互作用法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$:

$$f_1(x) = 0.0252 + 0.01139 \cos \frac{20\pi x}{3} + 0.00147 \cos \frac{40\pi x}{3}$$

$$f_2(y) = 0.0252 + 0.01139 \cos \frac{20\pi y}{3} + 0.00147 \cos \frac{40\pi y}{3}$$

其界面上的相互作用法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 的近似图像为:

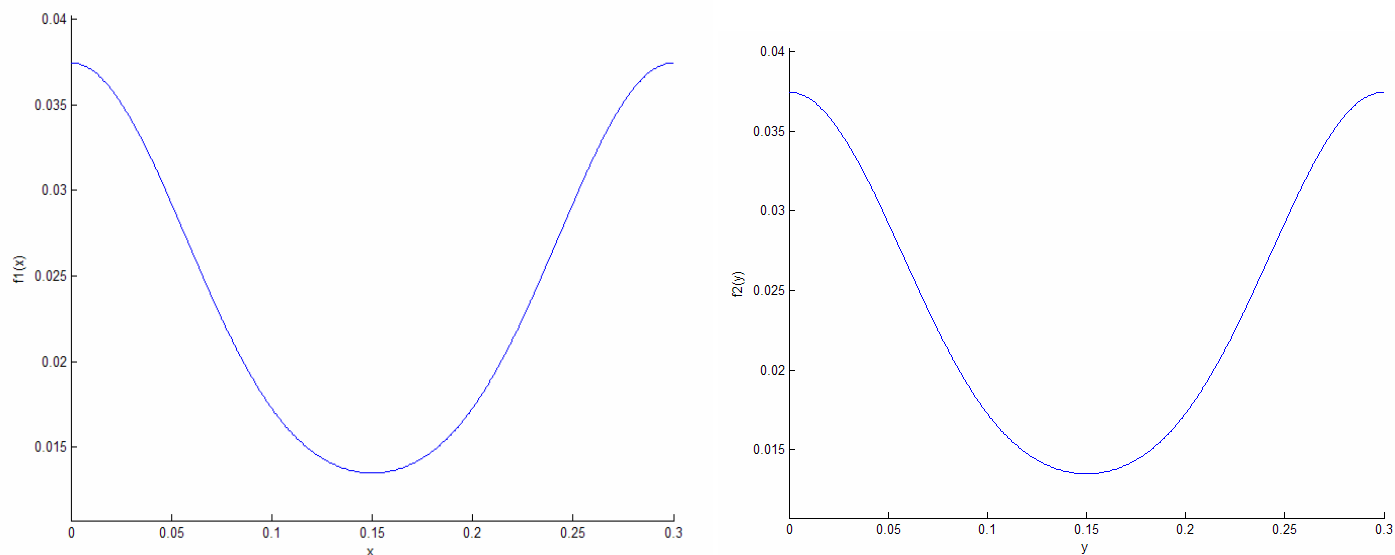


图 6 方形界面处的相互作用法向力 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 的分布

由图 6 可得到: 界面力分布不是均匀的, 呈类似二次曲线的形状, 在角点有应力集中现象, 此处的应力最大, 在中点处的紧箍力最小。角点的紧箍力约是中点紧箍力的 2.8 倍。

同上面的实例过程, 可利用 matlab 程序依次计算不同含钢率和不同的混凝土强度等级的方形钢管混凝土的组合弹性模量 E_z , 计算结果见表 1:

表 1 方形钢管混凝土组合弹性模量 E_z /(Mpa)

混凝土 等级	a			
	0.05	0.1	0.15	0.2
C30	33198.64	41363.28	49469.60	57607.76
C40	35179.28	43243.84	51280.72	59293.28
C50	36763.68	44754.96	52705.60	60640.08
C60	37951.92	45875.76	53773.68	61649.36
C70	38744.08	46626.32	54485.60	62321.84
C80	39536.16	47378.72	55197.28	62994.08

由于钢材的弹性模量是定值, 混凝土的弹性模量则随强度的提高而增大, 因此, 组合弹性模量的变化规律: 随着含钢率的增大而增大; 随着混凝土的强度等级的增大而增大。钢管混凝土的含钢率 ($a = A_s / A_c$) 一般为 $a=0.04-0.20$, 对于 C30-C80 的混凝土, 组合弹性模量 E_z 与混凝土弹性模量之比 $k_1 = E_z / E_c$ 及组合弹性模量 E_z 与钢材弹性模量之比 $k_2 = E_z / E_s$ 列入表 2 中:

表 2 组合弹性模量与混凝土弹性模量及钢材弹性模量之比

混凝土等级	a							
	0.05		0.1		0.15		0.2	
	K ₁	K ₂	K ₁	K ₂	K ₁	K ₂	K ₁	K ₂
C30	1.1064	0.1608	1.3784	0.2008	1.6496	0.24	1.9215	0.2823
C40	1.0824	0.1704	1.3304	0.2096	1.5776	0.2488	1.8248	0.2883
C50	1.0656	0.1784	1.2968	0.2176	1.5281	0.2563	1.7576	0.2944
C60	1.0544	0.1840	1.2744	0.2224	1.4936	0.2608	1.7128	0.2992
C70	1.0472	0.1882	1.2644	0.2264	1.4728	0.2648	1.6841	0.3024
C80	1.0408	0.1922	1.2472	0.2296	1.4528	0.2683	1.6568	0.3056

可见, $E_Z = (0.1608-0.3056) E_S$, $E_Z = (1.0408-1.9215) E_C$, 比值是合理的, 与文献[7]中以统一理论的计算结果: $E_Z = (0.161-0.434) E_S$, $E_Z = (1.103-2.292) E_C$ 相近。

表 3 组合轴压刚度与换算刚度之比

混凝土等级	a								
	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
C30	1.02125	1.0393	1.0583	1.07825	1.1001	1.12385	1.1476	1.17325	1.2008
C40	1.01935	1.03645	1.0545	1.07445	1.09535	1.11815	1.1419	1.16755	1.19415
C50	1.01745	1.03455	1.0526	1.0716	1.0925	1.11435	1.1381	1.1628	1.1894
C60	1.0165	1.03265	1.0507	1.0697	1.08965	1.1115	1.1343	1.159	1.1856
C70	1.0165	1.0317	1.04975	1.0678	1.0887	1.1096	1.1324	1.1571	1.18275
C80	1.01555	1.03075	1.04785	1.06685	1.0868	1.1077	1.1305	1.1552	1.18085

组合轴压刚度与换算刚度之比 $\zeta = \frac{E_z A_0}{E_C A_C + E_S A_S}$, 对于含钢率 $a=0.04-0.2$, 混凝土强度

等级为 C30-C80, 组合轴压刚度与换算刚度的比值可由程序计算得到, 结果列入下表中, 从计算结果中可以看出, 组合轴压刚度比换算刚度提高约 1.55%-20.8%。其差值随着含钢率 a 的增大而增大, 随着混凝土的提高而稍微有些减少。

4 结论

(1) 基于连续介质力学方法, 利用 MATLAB 这一有效的数学工具对钢管混凝土进行小变形下的弹性理论分析, 得到方形钢管混凝土组合体的界面法向力(紧箍力)的分布函数表达式 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$, 从图像可知: 方形的钢管混凝土界面法向力的分布很不均匀。在角点处有应力集中的现象, 角点的紧箍力最大, 在中点处的紧箍力最小。

(2) 方形钢管混凝土的组合刚度要比目前采用的没有考虑紧箍作用的换算刚度要高, 在计算范围内, 组合刚度要比换算刚度提高 6.5%-25.08%。随含钢率的增大而增大, 随混凝土强度的提高而略有降低。

参考文献

- [1] 钟善桐. 钢管混凝土的刚度分析. 哈尔滨建筑大学学报, 1999.
- [2] 韩林海. 钢管混凝土结构—理论与实践. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] 蔡绍怀. 现代钢管混凝土结构. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- [4] 中国工程建设标准化协会标准《钢管混凝土结构设计与施工规程》. 北京: 中国计划出版社, 1992.

- [5] 国家建筑材料工业局标准《钢管混凝土结构设计与施工规程》(JCJ 01 - 89). 上海: 同济大学出版社, 1989.
- [6] 吴家龙. 弹性力学 (Elasticity) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [7] 钟善桐. 钢管混凝土结构. 清华大学出版社 2003-8.

Study on compounding axis direction compressive stiffness of Concrete Filled Steel Tube Columns for the square cross-section

Chen Hui

Structure and Mechanical Engineering of Wuhan University of Technology, Wuhan (430070)

Abstract

Based on the method of continuum mechanics, small-deformation elastic analysis of concrete-filled steeltube is conducted. We get a square stage of concrete filled steel tube elastic confining force and the formula of compounding axis direction compressive stiffness of concrete-filled steel considering confining force. It is showed that the composite axial compression stiffness is 1.58%-20.8% larger than the simple summation of the stiffnesses of concrete and steel. The calculated results by the proposed formulas are close to those by unified theory.

Keywords: concrete filled steel tube; compounding axis direction compressive stiffness; Confining force

作者简介: 陈辉, 男, 1984 年出生, 武汉理工大学工程力学专业 2007 级硕士研究生。