欧拉积分在概率统计中的应用

李勇，胡江华
中国矿业大学（北京）理学院，北京（100083）
E-mail: hyliyong@126.com

摘　要：欧拉是 18 世纪数学界最杰出的人物之一，他不但为数学界作出贡献，更把数学推至几乎整个物理的领域。欧拉对数学的研究如此广泛，因此在许多数学的分支中也可经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理。欧拉(Euler)积分是其重要贡献之一，它广义积分定义的特殊函数,在概率论与数理统计及数理方程等学科中经常用到，本文重点阐述了 Gamma 函数，Beta 函数的性质，并通过列举实例的方法揭示出二者所具有的关系及在数学分析、概率统计等学科中的应用，从而使复杂的题目有了更简单易懂的解决方法，同时这也揭示了数学的不同学科之间的密切联系，在提高解题能力的同时，也加深对数学的理解和应用。

关键词：Gamma 函数；Beta 函数；含参变量积分
中图分类号: O174.66

1.　引言

Γ 函数与 B 函数是数学分析中两个重要的积分，灵活应用这两个积分可以很好的解决数学计算中的一些问题，本文通过举一些典型的例子来说明它们的应用，以引起更广泛的重视。

2．预备知识

2.1　χ^2-分布

（χ^2-分布）[1] 设总体 $X \sim N(0,1)$，X_1，$X_2,\cdots$，X_n 为样本，若 $\chi^2 = X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + \cdots + X_n^{\ 2}$，则统计量 χ^2 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim x^2(n)$，其密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

2．2 Γ 函数与 B 函数的性质

我们知道

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx \tag{1}$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{2}$$

(1)称为格马函数，(2)称为贝塔函数，二者统称为欧拉积分.

Γ 函数与 B 函数实际上是含参量非正常积分表示的两个特殊函数.

2.2.1 Γ函数的性质

（1） $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 时连续，且具有各界连续导数

（2）递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ （s>0）

（3） $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(s\pi)}$ ，由此得 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

（4） Γ函数的其他形式

在（1）式中，令 $x=py$ ，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}(py)^{s-1}e^{-py}pdy$$

$$=p^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-py}dy \qquad (s>0,p>0)$$

在（1）式中令 $x=y^2$ ，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}y^{2(s-1)}e^{-y^2}2ydy$$

$$=2\int_0^{+\infty}y^{2s-1}e^{-y^2}dy$$

2.2. 2 Β函数的性质

（1） $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $p>0,q>0$ 内连续[2].

（2） $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$

（3） $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)(p>0,q>0)$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)(p>1,q>0)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(q-1)(p-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1)(p>1,q>1)$$

（4） Β函数的其他形式

在（2）中，令 $x=\cos^2\varphi$，则有

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2q-1}\varphi\cos^{2p-1}\varphi d\varphi$$

在（2）式中，令 $x=\dfrac{y}{1+y}(y\geq 0)$，于是有

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy(p>0,q>0)$$

（5） $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}(p>0,q>0)$

3. Γ函数与B函数的应用

3.1 在数学分析中的应用

有些积分在计算起来比较麻烦，但巧妙应用Γ函数与B函数可以大大简化积分的运算.

例 1[4] 计算积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^3\sin x^2+\cos^7 2x\right)dx$

解：$\because f_1(x)=x^3\sin x^2, f_2(x)=\cos^7 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上连续，且分别为奇函数，偶函数.

所以原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^3\sin x^2dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2xdx$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2xd\overset{t=2x}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\times4-1}t\sin^{2\times\frac{1}{2}-1}tdt$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(4,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)}=\frac{3!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\frac{105}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{16}{35}$$

例2[3] 用B函数计算

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m xdx \quad （m,n 为自然数）$$

解：$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}x\cos^{2\cdot\frac{m+1}{2}-1}xdx$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$$

3.2 在概率与数理统计中的应用

例 3 设 $X\sim\chi^2(n)$，求 EX

解：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\xrightarrow{令\frac{x}{2}=t}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}2\cdot(2t)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-t}dt$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot(2)^{\frac{n}{2}}\cdot 2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}(t)^{\frac{n}{2}+1-1}\cdot e^{-t}dt$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$=n$$

例 4　证明概率积分 $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

证　令 $y=x^2$，则 $x=y^{\frac{1}{2}},dx=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$

$$\therefore\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-y}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

此概率积分可以推广成一般的积分极限问题，如证明：$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$

证　$\int_{0}^{+\infty}e^{-x^n}dx\overset{t=x^n}{=}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt$

$$=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\to\Gamma(1)=1(n\to\infty)(因\,\Gamma(t)\,连续)$$

由此可见，将 Γ 函数与 B 函及其关系应用于解概率题，可以使复杂的解题过程简单易懂，下面再举一个稍复杂一些的题目，更显出妙用.

例 5 设 ζ 与 η 相互独立，分别是自由度为 n 与 m 的 χ^2-分布的随机变量，试求

$$\zeta=\frac{\frac{\zeta}{n}}{\frac{\eta}{m}}\text{的密度函数}$$

解　自由度为 n 的 χ^2 – 分布的密度可由公式 6 给出，由此易求得 $\frac{\zeta}{n}$ 的密度为

$$f_{\zeta/n}=\begin{cases}\frac{n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(nx)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nx}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\frac{\eta}{m}$ 的密度为

$$f_{\eta/m}=\begin{cases}\frac{m}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(mx)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{mx}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

再由商分布的公式得

$$f_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(yx,x)dx$$

$$=\int_o^{+\infty}x\cdot\frac{n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot(nxy)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nxy}{2}}\cdot\frac{m}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(mx)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{mx}{2}}dx$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty}x^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{x(ny+m)}{2}}dx$$

令 $x(ny+m)=t$，则有

$$f_\zeta(y)=\frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\cdot\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{ny+m}\right)^{\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{t}{2}}(ny+m)dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}\cdot m^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(ny+m)\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}\cdot m^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}\cdot m^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(ny+m)^{\frac{m+n}{2}}}$$

此密度称为参数为 n,m的$F-$分布,记作 $F(n,m)$,它是数理统计中常用的分布之一，还有 t-分布在求解过程中也巧妙的引用 Γ 函数与 B 函数.

4. 结论

无论在数学分析，还是在概率统计中，运用 Γ 函数与 B 函数.解题的关键是经换元或变形，使其具有 Γ 函数与 B 函数的定义形式，然后再应用它们的性质及相互关系.

参考文献

[1]魏宗舒等编.概率论与数理统计[M].北京:高等教育出版社,1983:233-234
[2]华东师范大学数学系编.数学分析(下)[M].北京:高等教育出版,1991:335-350
[3]裴礼文. 数学分析中典型问题与方法[M]. 北京:高等教育出版社,1993:679-690
[4]中国矿业大学(北京)硕士研究生入学试题[J].数学分析,2004

The Application of Euler Integration in Probability and Statistics

Li yong, Hu jianghua
China University of Mining and Technology, Beijing (100083)

Abstract

Euler is the one of the most prominent figures in the 18th century mathematics. He not only contribute to mathematics but also push mathematics to almost the entire field of physics. Euler made such a broad study of mathematics, so in many branches of mathematics can often see his name in important constants, formulas and theorems. Euler integration is one of the important contribution. it is composed of peculiar function that the broad sense integral" defines and often used in probability theory , mathematical statistics and mathematical equations, and other disciplines. This article mainly elaborated the Gamma and Beta functions' proposition , furthermore demonstrate the relations and in the mathematical analysis, the probability statistics which the two has the application problem solving rule ,so that the complex problems have more easy solution, at the same time it also reveals the close link between mathematics and other different disciplines. The way not only increase the ability to solve problems, but also deepen their understanding of mathematics and applications

Key words: Gamma Functions; Beta Functions; Integration with the parameter